APPLICATIONS ET FONCTIONS

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x^2 + 3x + 2$. Déterminez si f est injective, surjective ou bijective. Déterminez son image $\operatorname{Im} f$

***2)** On pose $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2 + 3z + i$. f est-elle injective, surjective, bijective ?

***3)** Dans chacun des cas suivants, déterminez si f est injective, surjective ou bijective et déterminez son image $\operatorname{Im} f$.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + 2y - z,\ 2x - y + 3z)$

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + 2y - z,\ 2x - y + 3z,\ 4x + 3y + z)$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + 2y - z,\ 2x - y + 3z,\ -x + y + z)$

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + 2y,\ 2x - y,\ 3x - y)$

e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(x, y, z) = (-2x + y + z,\ x - 2y + z,\ x + y - 2z,\ x + 2y - 3z)$

****4)** On pose E l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ et φ l'application qui à $A \in E$ associe la somme des éléments de A : $\varphi(A) = \sum_{x \in A} x$. Déterminez si φ est injective, surjective ou bijective.

****5)** On pose $Q = \mathbb{R}_+^{*2}$, $p : Q \to Q$ définie par $p(a, b) = (\sqrt{a^2 + b^2}, \frac{b}{a})$. Montrez que p est une bijection.

****6)** On pose $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$. Déterminez si g est injective, surjective ou bijective. Déterminez son image.

****7)** On appelle P le plan géométrique. On définit l'application $f : P \to P$: à tout point M d'affixe z, on associe $f(M)$ d'affixe $z^2 - 2iz - 1$.

a) f est-elle injective, surjective, bijective ?

b) Montrez que l'image de la droite (Ox) est une parabole et déterminez l'image de la droite (Oy).

c) Déterminez l'image réciproque par f de chacune de ces deux droites.

****8)** On appelle f l'application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ qui à (n, m) associe $7n + 3m$. Déterminez si f est injective, surjective ou bijective. Déterminez $f(\{0\} \times \mathbb{N})$, $f(\mathbb{N} \times \{0\})$. Déterminez l'image réciproque de $2\mathbb{N}$ (ensemble des nombres pairs), $2\mathbb{N} + 1$ (ensemble des nombres impairs). Déterminez l'image de f (on pourra penser à la div. euclidienne par 7 ou par 3).

****9)** On pose g l'application de $\mathbb{C} - \{i\}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $\frac{z + i}{z - i}$. Déterminez si g est injective, surjective ou bijective. Déterminez l'image de $\mathbb{R}$, l'image de $i\mathbb{R} - \{i\}$, de $\mathbb{U} - \{i\}$.

****10)** On pose $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $f(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + y$. Montrez que f est une bijection.

****11)** On pose E l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F celui des applications de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0.

Pour tout $u \in E$, on définit $v : x \mapsto \int_0^x u$.

a) Montrez qu'on définit ainsi une application $\Phi : E \to F$ en posant $\Phi(u) = v$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n : x \mapsto x^n$. Calculez $\Phi(X_n)$.

c) Montrez que Φ est une bijection.

**12)

a) Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$. Montrez que si $g \circ f$ est injective alors f l'est aussi, et que si $g \circ f$ est surjective alors g l'est aussi.

b) Soit E, F, G, H 4 ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$. Montrez que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g, h le sont aussi.

c) Avec les mêmes hypothèses, mais avec $E = H$, montrez l'équivalence : $f \circ h \circ g$ et $h \circ g \circ f$ injectives et $g \circ f \circ h$ surjective si et seulement si f, g, h sont bijectives.

**13) Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to E$, $h : F \to E$. Montrez que si $g \circ f = Id_E$ et $f \circ h = Id_F$, alors f est bijective et que $f^{-1} = g = h$.

**14) Soit E un ensemble, $f : E \to E$ telle que $f \circ f = f$. Montrez que si f est injective ou surjective, alors $f = Id_E$.

**15) Soit E un ensemble, $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrez que f est injective si et seulement si f est surjective.

**16) Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : E \to G$. On définit $h : E \to F \times G$ par $h(x) = (f(x), g(x))$.

a) Montrez que si f ou g est injective, alors h est injective.

b) Est-il vrai que si f ou g est surjective, alors h est surjective ?

**17) Soit E, F, G, H quatre ensembles, $f : E \to F$, $g : G \to H$. On définit $\varphi : E \times G \to F \times H$ par $\varphi(x, y) = (f(x), g(y))$.

Déterminez, s'il y en a, les liens entre l'injectivité (resp. la surjectivité) de f et g avec l'injectivité (resp. la surjectivité) de φ.

**18) Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$.

Montrez que f est injective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$.

**19) Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$.

Montrez que f est surjective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_F$.

**20) Soit $f : E \to F$ une application, H un ensemble, montrez les équivalences :

a) f est injective si et seulement si $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

b) f est injective si et seulement si $\forall (g, h) \in E^H \quad (f \circ g = f \circ h) \to (g = h)$.

c) f est surjective si et seulement si $\forall (g, h) \in F^H \quad (g \circ f = h \circ f) \to (g = h)$.

**21) Soit $f : E \to F$ une application.

a) Montrez que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset \overset{<}{f}(f(A))$.

b) Montrez l'équivalence : f est injective si et seulement si pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $A = \overset{<}{f}(f(A))$.

c) Montrez que pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f(\overset{<}{f}(B)) \subset B$.

d) Montrez l'équivalence : f est surjective si et seulement si pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f(\overset{<}{f}(B)) = B$.

e) Montrez l'équivalence : f est bijective si et seulement si pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $f(E - A) = F - f(A)$.

**22) Soit E un ensemble, A, B deux parties de E.

On pose $p : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ l'application définie par : $p(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

a) Montrez que p est injective si et seulement si $E = A \cup B$.

b) Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur (A, B) pour que p soit surjective.

c) Dans le cas où p est bijective, quelle est la réciproque de p ?

****23)** Soit E un ensemble.

a) Montrez qu'il existe une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$.

b) Montrez par l'absurde qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$ (th. de Cantor) : on pourra considérer l'ensemble $A = \{x \in E \ / \ x \notin f(x)\}$.

Cet exercice prouve donc que $\mathscr{P}(E)$ est beaucoup plus gros que E : si E est infini, alors $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble infini plus gros, donc $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ est encore plus gros, etc.

****24)** Soit $f : E \to F$ une application.

On pose $\Phi : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E)$ définie par $\Phi(B) = \overset{<}{f}(B)$.

Montrez que Φ est injective si et seulement si f est surjective et que Φ est surjective si et seulement si f est injective.