Applications

1 Applications

1.1 Généralités

Définition. (Définition informelle)
Soit E, F deux ensembles. On appelle application de E dans F tout moyen qui permet d'associer à chaque élément de E un élément de F.

Si f une application de E dans F, on note $f : E \to F$. E est appelé ensemble de départ de f (ou source), F ensemble d'arrivée de f (ou but).

Pour chaque élément x de E, on note $f(x)$ l'élément de F qui lui est associé.

Soit $x \in E$, $y \in F$. Si $y = f(x)$, on dit que y est l'image de x par f ou que y est la valeur de f au point x ou que x est un antécédent de y par f. Tout élément de E a une unique image par f : c'est la définition d'une application.

En revanche, un élément de F peut avoir plusieurs antécédents par f, ou aucun. Par exemple, sin est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 0 a au moins deux antécédents par sin car $\sin 0 = \sin \pi = 0$ et 2 n'a aucun antécédent par sin.

Donc il ne faut pas croire que la notation $f : E \to F$ signifie que tous les éléments de F sont atteints par f (*i.e.* ils ont tous un antécédent). Cela signifie simplement que pour tout $x \in E$, on peut lui associer un élément $f(x) \in F$.

Remarque. Une application $f : E \to F$ peut être « explicite », c'est-à-dire qu'on peut déterminer $f(x)$ par une « formule ». Dans ce cas, on note $x \mapsto f(x)$ pour signifier comment on détermine l'image de x. Par exemple, l'application « double »de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ peut être notée $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$

Mais il ne faut pas croire que toutes les applications d'un ensemble dans un autre peuvent être explicitées. On peut aussi définir une application implicitement. Par exemple, on définit une application φ de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{N}^*$ en associant à tout réel $x \geqslant 1$ le plus grand entier naturel non nul n tel que $n! \leqslant x$: $\varphi(1) = 1$, $\varphi(1,5) = 1$, $\varphi(\pi^2) = 3$, $\varphi(e^5) = 5$, etc., mais il n'y a aucune formule qui permettrait de dire $\varphi(x) = ...$

On appelle graphe d'une application l'ensemble $G = \{(x, f(x)) \;/\; x \in E\}$, sous-ensemble de $E \times F$.

Connaître l'application f revient donc à connaître les ensembles E, F et le graphe G.

1.2 Définition formelle

Définition. Soit E, F deux ensembles.
On appelle application de E dans F tout triplet $f = (E, F, G)$ où G est une partie de $E \times F$ telle que

$$\forall x \in E \quad \exists! y \in F \quad (x, y) \in G$$

Dans ce cas, l'unique y de F associé à chaque x de E est noté $f(x)$.

Avec cette définition formelle, une application est donc un triplet d'ensembles (son ensemble de départ, son ensemble d'arrivée, son graphe).

Toute proposition parlant d'application peut être réécrite à l'aide de cette définition formelle, mais personne ne le fait réellement, sauf à disposer de feuilles de papier très larges !

Proposition 1. *Soit f, g deux applications.*
$f = g$ si et seulement si f et g ont le même ensemble de départ E, le même ensemble d'arrivée F et pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Définition. Soit f, g deux applications de E dans F, A une partie de E.
On dit que $f = g$ sur A ou que f et g coïncident sur A quand pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

On note $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F. Dans le cas où $E = F$, on note plus simplement $\mathscr{F}(E) = E^E$ l'ensemble des applications de E dans E.

1.3 Restriction, prolongement, application induite

Définition. Soit E, F deux ensembles, A une partie de E.
— Soit $f : E \to F$. On appelle restriction de f à A l'application notée $f|_A : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.
— Soit $g : A \to F$. On appelle prolongement de g à E toute application $f : E \to F$ telle que $f|_A = g$.

Remarque. Étant donnée f, il n'existe qu'une seule restriction de f à A. En revanche, étant donnée g, il existe en général plusieurs prolongements de g à E.

Définition. Soit E, F deux ensembles, $A \subset E$, $B \subset F$. Soit f une application de E dans F telle que pour tout $x \in A$, $f(x) \in B$.
On appelle application induite par f de A dans B l'application $\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.
Cas particulier : si $E = F$, $A = B$ et si pour tout $x \in A$, $f(x) \in A$, alors on dit que A est stable par f et on définit l'application induite par f de A dans A.

2 Composition d'applications

2.1 Définition

Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$.
On appelle composée de g et f l'application notée $g \circ f : E \to G$ définie par : pour tout $x \in E$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$
$$\xrightarrow[g \circ f]{\qquad\qquad}$$

2.2 Propriétés

— La composition des applications est associative : étant données trois applications $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$, on a l'égalité $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
— En revanche la composition n'est pas commutative. En général, si $g \circ f$ est définie, $f \circ g$ ne l'est pas ; même si c'est le cas, en général $g \circ f \neq f \circ g$.
— Soit E un ensemble, on appelle identité de E l'application $\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$.
Il est alors évident que pour toute application $f : E \to F$, on a : $f \circ \mathrm{Id}_E = f$ et $\mathrm{Id}_F \circ f = f$.

3 Surjections, bijections, injections

3.1 Surjections

Définition. Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$.
On dit que l'application f est surjective (ou que f est une surjection) quand tout élément de F a au moins un antécédent par f dans E, c'est-à-dire quand pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ a au moins une solution.

$$f \text{ est surjective} \iff \forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$$

Exemples.

- L'application $f : x \mapsto x^3 - x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est surjective, car pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
- Soit E l'ensemble des parties non vides de $\mathbb{N}$ et $g : E \to \mathbb{N}$ l'application qui à tout élément A de E associe le plus petit élément de A. g est surjective puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $g(A) = n$ d'inconnue A a au moins une solution dans E.
- En revanche, l'application sin de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas surjective, car 2 n'a pas d'antécédent.

3.2 Bijections

Définition. On dit que f est bijective (ou que f est une bijection) quand tout élément de F a un unique antécédent par f dans E, c'est-à-dire quand pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ a une unique solution.

$$f \text{ est bijective} \iff \forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x)$$

Exemples.

- ln de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ est bijective, car pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\ln x = y$ d'inconnue x a une seule solution dans $\mathbb{R}_+^*$ ($\ln x = y \iff x = e^y$).
- L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe $(2x+3y, x+2y)$ est bijective, puisque pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $(2x + 3y, x + 2y) = (a, b)$ d'inconnue (x, y) a pour unique solution $(2a - 3b, -a + 2b)$.
- En revanche, sin de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas bijective car 0 a une infinité d'antécédents par sin.

Soit $f : E \to F$ une bijection. A tout élément y de F, on peut lui associer son unique antécédent dans E par f. On définit ainsi une application $F \to E$ appelée réciproque de f (ou inverse de f), notée f^{-1}.

On a alors : pour tout $y \in F$, $f(f^{-1}(y)) = y$ (par définition), donc $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

On a aussi : pour tout $x \in E$, $f^{-1}(f(x)) = x$, donc $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 2. *Soit $f : E \to F$ une application. S'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors f est une bijection et g est sa réciproque.*

3.3 Injections

Définition. On dit que f est injective (ou que f est une injection) quand tout élément de F a au plus un antécédent par f dans E, c'est-à-dire quand pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ a 0 ou 1 solution.

$$f \text{ est injective} \iff \forall y \in F \quad (\exists! x \in E \quad y = f(x)) \text{ ou } (\forall x \in E \quad y \neq f(x))$$

Exemples.

- L'application exp de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est injective, car pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = e^x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ a au plus une solution (si $y \leqslant 0$, pas de solution ; si $y > 0$, unique solution $x = \ln y$).
- L'application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$ qui à (u, v) associe $2^u 3^v$ est injective, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $2^u 3^v = n$ a au plus une solution (si $n = 1$, unique solution $(0, 0)$; si n est divisible par un nombre premier supérieur à 3, pas de solution ; etc)
- L'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$, est injective puisque pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'équation $2n = p$ a au plus une solution (si p est pair, unique solution $\dfrac{p}{2}$; si p est impair, pas de solution).

L'équivalence suivante est alors évidente :

Proposition 3. *f est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective.*

Pour montrer qu'une application est injective, on utilise souvent la caractérisation équivalente suivante :

Proposition 4. *f est injective*
$$\begin{aligned} &\iff \forall (x, x') \in E^2 \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \\ &\iff \forall (x, x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \end{aligned}$$

Remarque. La négation de « f est injective » n'est pas « f est surjective » ! ! ! Il n'y a aucun rapport entre l'injectivité et la surjectivité.

De plus ce ne sont que des propriétés éventuelles d'une application : a priori une application n'a aucune raison d'être injective ou surjective.

3.4 Composée d'injections,...

On montre que la composée de deux injections est une injection, celle de deux surjections est une surjection, et par conséquent, celle de deux bijections est une bijection.

Dans ce dernier cas, soit $f : E \to F, g : F \to G$ deux bijections. La composée $g \circ f$ est une bijection et on a : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4 Image, image réciproque d'une partie

4.1 Image d'une partie

Définition. Soit $f : E \to F$, A une partie de E.

On appelle image de A par f l'ensemble noté $f(A)$ des images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\} = \{y \in F \ / \ \exists x \in A \quad y = f(x)\}$$

Pour $y \in F$ on a l'équivalence : $y \in f(A) \iff (\exists x \in A \quad y = f(x))$

$f(A)$ est donc une partie de F, c'est l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent dans A.

Exemples.

- $\sin([0, \pi]) = [0, 1]$
- $\theta(]-1, 2[) = [0, 4[$ en notant $\theta : x \mapsto x^2$
- $\cos(\{\pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}) = \{-1\}$

Dans le cas où $A = E$, on appelle image de l'application f l'ensemble $f(E)$, noté aussi $\operatorname{Im} f$. On a alors l'équivalence : f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = f(E) = F$.

4.2 Image réciproque d'une partie

Définition. Soit B une partie de F.

On appelle image réciproque de B par f l'ensemble noté $\overset{<}{f}(B)$ des antécédents par f des éléments de B :

$$\overset{<}{f}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}$$

Pour $x \in E$, on a l'équivalence : $x \in \overset{<}{f}(B) \iff f(x) \in B$.

$\overset{<}{f}(B)$ est donc une partie de E. Elle peut être éventuellement vide même si B est non vide.

Exemples.

- $\overset{<}{\theta}([0, 4[) =]-2, 2[$
- $\overset{<}{\sin}([0, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi]$
- $\overset{<}{\theta}([-3, -1]) = \emptyset$

Proposition 5. *Soit E, F deux ensembles, $f : E \to F$ une bijection.*

L'image réciproque par f d'une partie de F est l'image directe de B par la réciproque de f :

Pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $\overset{<}{f}(B) = f^{-1}(B)$.

Remarque.
De ce résultat découle une convention d'écriture : souvent, on note $f^{-1}(B)$ l'image réciproque de B, même si f n'est pas bijective.

Il ne faut pas se laisser abuser par cette notation : elle a un sens car elle concerne une partie de F, pas un élément de F. La notation $f^{-1}(t)$ où t est un élément de F n'a de sens que si f est une bijection.

4.3 Quelques règles de calcul

Proposition 6. *Soit $f : E \to F$.*
Alors

- ▷ *pour tout couple (A, B) de parties de E,*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \ \ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

- ▷ *pour tout couple (A, B) de parties de F,*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \ \ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

5 Fonctions

Soit E, F deux ensembles. On appelle fonction de E dans F toute application d'une partie de E dans F, c'est-à-dire un moyen d'associer à *certains éléments* de E un élément de F.

Soit f une fonction de E dans F, on appelle ensemble de définition de f l'ensemble des éléments x de E auxquels on peut associer un élément de F, qu'on note bien sûr $f(x)$. L'ensemble de définition de f est noté $\mathscr{D}_f$,

$$\mathscr{D}_f = \{x \in E / f(x) \text{ existe}\}$$

La fonction f est donc une application de $\mathscr{D}_f$ dans F.

Soit f une fonction de E dans F, A une partie de E, B une partie de F.
- — On dit que f est définie sur A quand $A \subset \mathscr{D}_f$, c'est-à-dire si pour tout $x \in A$, $f(x)$ existe.
- — On dit que f est à valeurs dans B sur A quand pour tout $x \in A$, $f(x) \in B$, autrement dit $f(A) \subset B$.

Soit f, g deux fonctions de E dans F, A une partie de E telle que f et g soient définies sur A.

On dit que $f = g$ sur A quand pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

Remarque. Ne confondez pas « $f \neq 0$ sur A » qui signifie que « f n'est pas la fonction nulle sur A », c'est-à-dire « il existe $x \in A$ tel que $f(x) \neq 0$ »,
avec « f ne s'annule pas sur A » qui signifie « pour tout $x \in A$, $f(x) \neq 0$ ».

6 Familles d'objets

6.1 Généralités

Définition. Soit E un ensemble dont les éléments sont appelés objets, I un ensemble dont les élément sont appelés indices.

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'objets de E indexée par I (ou même (x_i) quand l'ensemble des indices est évident) est simplement une application de I dans E, où on note x_i plutôt que $x(i)$ l'image d'un indice i.

Dans le cas où I est un ensemble fini, on parle de suite finie d'objets ; dans le cas où $I = \mathbb{N}$, on parle de suite d'objets.

Le vocabulaire des applications est donc applicable en principe aux familles d'objets : on parle de famille injective. En pratique, on se limite à cette notion. L'idée de famille est associée à celle de paramètre : on considère l'indice plutôt comme un paramètre que comme une variable.

6.2 Famille de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble, I un ensemble d'indices non vide.

Une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E est donc une application de I dans $\mathscr{P}(E)$.

On note $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \ / \ \exists i \in I \ x \in A_i\}$ la réunion de la famille (A_i),

$\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \ / \ \forall i \in I \ x \in A_i\}$ l'intersection de la famille (A_i).

Proposition 7. *Soit $f : E \to F$.*

Alors

- ▷ *pour toute famille (A_i) de parties de E,*

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

- ▷ *pour toute famille (A_i) de parties de F,*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$