

## 1 Polynômes réels ou complexes

$K$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , en pratique  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

- a) Définition d'un polynôme, ensemble  $K[X]$ . Degré, coefficient dominant. Opérations sur les polynômes (somme, produit par un scalaire, produit, composition) et degrés.  $K[X]$  est un anneau commutatif intègre, qui contient  $K$  par identification des constantes et des polynômes constants. Fonction polynôme associée.
- b) Divisibilité dans  $K[X]$ . Racines d'un polynôme, division par  $X - a$ , nombre de racines distinctes d'un polynôme. Conditions pour qu'un polynôme soit nul. Bijection entre les fonctions polynômes et les polynômes (à titre culturel, les polynômes de  $\mathbb{F}_3[X]$  ont été présentés pour montrer l'intérêt de la distinction entre ces objets).
- c) Division euclidienne.
- d) Dérivation des polynômes. Racines simples et multiples, les racines multiples de  $P$  sont les racines communes à  $P$  et  $P'$ .
- e) Formule de Taylor, ordre de multiplicité d'une racine, détermination de l'ordre de multiplicité d'une racine.
- f) Th. de D'Alembert-Gauss, factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$ , racines complexes d'un polynôme réel, factorisation dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- g) Relations entre les racines et les coefficients dans le cas d'un polynôme scindé.
- h) Arithmétique dans  $K[X]$  : polynômes associés, algorithmes d'Euclide, pgcd, coeff. de Bézout, polynômes premiers entre eux, th. de Gauss, ppcm, polynômes irréductibles, décomposition en produit de facteurs irréductibles.

## 2 Fractions rationnelles

$K$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , en pratique  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

- a) Tout anneau commutatif intègre est contenu dans un corps, corps des fractions. Application à l'anneau  $K[X]$ , son corps des fractions est  $K(X)$ . Degré d'une fraction rationnelle. Représentant irréductible. Racines et pôles. Fonction polynôme associée.
- b) Dérivation des fractions : définition, extension des résultats.
- c) Partie entière. Partie polaire associée à un pôle, décomposition en parties polaires. Décomposition d'une partie polaire en éléments simples.  
Décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}[X]$ . Quelques idées pour calculer les coefficients.  
Décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}[X]$ .