FRACTIONS RATIONNELLES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Décomposez en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

a) $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ b) $\dfrac{X^2+1}{X^3-6X^2+11X-6}$ c) $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$ d) $\dfrac{4X^2+X+4}{X^3+3X^2-4}$

e) $\dfrac{4}{(X^2-1)^2}$ f) $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$ g) $\dfrac{X^6}{X^4-1}$ h) $\dfrac{3}{(X^3-1)^2}$

i) $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$ j) $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ k) $\dfrac{X^n-1}{X^{n+1}-(n+1)X-1}$

***2)** Même exercice dans $\mathbb{R}(X)$.

a) $\dfrac{X^6}{X^4-1}$ b) $\dfrac{1}{X^6+1}$ c) $\dfrac{3}{(X^3-1)^2}$ d) $\dfrac{X^3}{(X^2+1)^3}$

****3)** Soit $n \geqslant 2$. On note $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les racines n-èmes de l'unité. Réduisez sous la forme $P(X)/Q(X)$ la fraction $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k^2}{X-\omega_k}$.

****4)**

a) Montrez que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$.

b) Calculez les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{k^2}{(k^2-1)(k^2-4)}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=2}^{n} \frac{2p+1}{p(p-1)} \cdot \frac{1}{3^{p-1}}$.

c) Calculez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)^2}$ en sachant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

****5)**

a) Montrez que $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$ (indication : $x \geqslant \ln(1+x)$).

b) Montrez que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k^2-1} = +\infty$ et déterminez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k^2-1} \right) - h_n \right)$.

***6)** On note a_1, a_2, a_3, a_4 les racines complexes de $P = X^4 + X + 1$. Calculez rapidement $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{a_i - 1}$ en utilisant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

****7)** Déterminez de façon explicite la dérivée n-ème de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

****8)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$. En considérant la fraction rationnelle $\left(\dfrac{P'}{P}\right)'$, montrez que le polynôme $P'^2 - PP''$ n'admet aucune racine réelle.

****9)** On pose $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n (X-b)^m}$ où m et n sont des entiers naturels non nuls.

On veut décomposer F en éléments simples sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on écrit $F(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(X-a)^{n-k}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{b_k}{(X-b)^{m-k}}$.

a) Calculez a_0 et b_0 en précisant la méthode.

b) Soit $G = (X-a)^n F$. Calculez $G^{(k)}(a)$ et en déduire

$$a_k = (-1)^k \binom{m+k-1}{k} \frac{1}{(a-b)^{m+k}}.$$

c) Donnez l'expression de b_k.

d) En déduire en prenant $a = 1$ et $b = -1$, la valeur de

$$S_{n,m} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{m+k-1}{k}}{2^{m+k}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\binom{n+k-1}{k}}{2^{n+k}}$$

où m et n sont des entiers naturels non nuls.