Fractions rationnelles

Dans tout le cours, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, le plus souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, quelquefois $\mathbb{Q}$ et plus rarement autre chose. Les éléments de K sont appelés les scalaires.

1 Ensemble $K(X)$

1.1 Définition

D'abord, un résultat admis.

Proposition 1. *Si A est un anneau commutatif intègre, alors il existe un corps L tel que A soit une partie de L.*
Parmi tous les corps L contenant A, il en existe un minimal (au sens de l'inclusion) : on l'appelle le corps des fractions de A. Tous ses éléments peuvent s'écrire $\frac{a}{b}$ où $(a,b) \in A \times A^*$.

Dans le corps de fraction d'un anneau A, on a l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ quand on a l'égalité $ab' = a'b$ dans l'anneau A : on dit que $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ sont des représentants d'une même fraction.

On applique le théorème précédent à l'anneau $K[X]$.

Définition. On note $K(X)$ le corps des fractions de l'anneau commutatif intègre $K[X]$. Ses éléments sont appelés des fractions rationnelles à coefficients dans K, ils s'écrivent sous la forme $\frac{P}{Q}$ où $(P,Q) \in K[X]^2$, $Q \neq 0$.

1.2 Degré

Définition. Soit $F \in K(X)$. Alors il existe $(P,Q) \in K[X] \times K[X] - \{0\}$ tel que $F = \frac{P}{Q}$.
On appelle degré de F l'entier relatif $\deg P - \deg Q$ ou $-\infty$.

A priori cette définition est ambiguë : pourquoi ? Que faut-il montrer pour qu'elle ne le soit pas ?

Proposition 2. *Soit $(F,G) \in K(X)^2$. Alors*
- ▷ $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$
- ▷ $\deg(F\,G) = \deg F + \deg G$.

1.3 Représentant irréductible d'une fraction rationnelle

Proposition 3. *Parmi les représentants d'une fraction rationnelle F de $K(X)$, il en existe un et un seul $\frac{P}{Q}$ (où $(P,Q) \in K[X]^2$) tel que P et Q soient premiers entre eux et Q unitaire. On l'appelle le représentant irréductible de F.*

Si F est une fraction rationnelle et $\frac{P}{Q}$ est son représentant irréductible, on appelle racines de F les racines de P et pôles de F les racines de Q. On note que les racines et les pôles forment deux ensembles disjoints.
L'ordre de multiplicité d'une racine de F est son ordre en tant que racine de P. Et de même, on parle d'ordre de multiplicité d'un pôle de F.

1.4 Fonction rationnelle associée

Si F est une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ sous forme irréductible, on note $p(F)$ l'ensemble de ses pôles. Alors on peut lui associer la fonction de K dans K $f : x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$, définie sur $K - p(F)$. Cette fonction est appelée fonction rationnelle.

Remarque. Si $\frac{A}{B}$ est une fraction qui n'est pas sous forme irréductible, alors si on définit la fonction $x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$ directement, tous les points interdits qui ne sont pas des pôles de la fraction sont en fait des points en lesquels la fonction est prolongeable par continuité (et même par classe C^∞). Donc autant réduire la fraction avant de considérer la fonction rationnelle associée.

2 Dérivation des fractions rationnelles

Définition. Soit $(P, Q) \in K[X]^2$ et $Q \neq 0$, $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. On appelle fraction dérivée la fraction $F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$.

Toutes les propriétés calculatoires de la dérivation des polynômes restent vraies.

Proposition 4. *Soit $\lambda \in K$, $(F, G) \in K(X)^2$. Alors*
- $(\lambda F)' = \lambda F'$
- $(F + G)' = F' + G'$
- $(FG)' = F'G + FG'$
- $\left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F'G - FG'}{G^2}$.

De même, on définit par récurrence la dérivée n-ème d'une fraction rationnelle. La formule de Leibniz reste valable pour dériver n fois des produits.

3 Décomposition en éléments simples

3.1 Partie entière

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle. On effectue la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

Alors $F = Q + \frac{R}{B}$: on a donc écrit F comme la somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle de degré strictement négatif. On montre que cette écriture est unique.

Q s'appelle la partie entière de la fraction F.

Désormais, on s'intéresse surtout aux fractions de degrés strictement négatifs. On note $K_-(X)$ l'ensemble de ces fractions. Cet ensemble est un K-espace vectoriel : il est stable par addition et par multiplication par les scalaires.

3.2 Décomposition polaire

Proposition 5. *Soit $F \in K_-(X)$ et a un pôle de F d'ordre de multiplicité α.*
Alors il existe un unique couple $(P, G) \in K[X] \times K_-(X)$ tel que

- ▷ $F = G + \frac{P}{(X-a)^\alpha}$,
- ▷ $\deg P < \alpha$,
- ▷ *a n'est pas un pôle de G.*

Dans cette écriture, la fraction $\frac{P}{(X-a)^\alpha}$ est appelée la partie polaire de F en a.

Corollaire 1. *Soit F une fraction rationnelle de $K_{-}(X)$, $\dfrac{A}{B}$ son représentant irréductible où B est un polynôme scindé dont les racines sont $a_1, \ldots, a_m$ d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.*
Alors il existe un unique m-uplet $(P_1, \ldots, P_m) \in K[X]^m$ tel que

— $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{(X-a_k)^{\alpha_k}}$

— *pour tout* $k \in [\![1, m]\!]$, $\deg P_k < \alpha_k$.

Ceci est toujours possible dans $\mathbb{C}(X)$, car les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont toujours scindés (th. de D'Alembert-Gauss).

3.3 Décomposition d'une partie polaire

Proposition 6. *Soit $P \in K[X]$, a un scalaire non racine de P et α un entier tel que $\alpha > \deg P$.*

Alors il existe un unique α-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha) \in K^\alpha$ tel que $\dfrac{P}{(X-a)^\alpha} = \displaystyle\sum_{j=1}^{\alpha} \frac{\lambda_j}{(X-a)^j}$

3.4 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

De deux résultats précédents, on déduit le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Théorème 1. *Soit F une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$, $a_1, \ldots, a_m$ les pôles de F d'ordres de multiplicité $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.*
Il existe un unique polynôme E et des scalaires $\lambda_{k,j}$ où $k \in [\![1, m]\!]$ et $j \in [\![1, \alpha_k]\!]$ tels que

$$P = E + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(X-a_k)^j}$$

Le résultat reste vrai avec une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$ dont le dénominateur est scindé : les coefficients sont alors tous réels.

3.5 Calcul pratique des coefficients

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction sous forme irréductible.

a) Pôles simples

Soit a une racine simple de B.

La partie polaire de F en a se réduit alors à un seul terme $\dfrac{\lambda}{X-a}$.

On factorise B : $B = (X-a)C$ avec $C(a) \neq 0$. Alors $\lambda = \dfrac{A(a)}{C(a)} = \dfrac{A(a)}{B'(a)}$.

***Exercices* :**

1) décomposer $F = \dfrac{X+1}{X(X-1)}$

2) décomposer $F = \dfrac{1}{X^n - 1}$

b) Pôles doubles

Soit a une racine double de B.

La partie polaire de F en a comporte alors deux termes $\dfrac{\lambda}{X-a} + \dfrac{\mu}{(X-a)^2}$.

On factorise B : $B = (X-a)^2 C$ avec $C(a) \neq 0$. Alors $\mu = \dfrac{A(a)}{C(a)} = \dfrac{2\,A(a)}{B''(a)}$.

Puis pour obtenir λ, on soustrait le terme qu'on vient de calculer : $F - \dfrac{\mu}{(X-a)^2}$ est donc une fraction qui possède a comme pôle simple. On peut donc appliquer les idées précédentes pour calculer λ.

Remarque. Parfois il s'avère compliqué de réduire concrètement la fraction $F - \dfrac{\mu}{(X-a)^2}$, car on ne sait pas factoriser facilement $(X-a)^2$ dans le dénominateur B.

Alors on pose $P = (X-a)^2 A - \mu B$: a est racine triple de P et on a $\lambda = \dfrac{P^{(3)}(a)}{3\,B''(a)}$.

Exercices **:**

1) décomposer $F = \dfrac{X^2-3}{X(X-2)^2}$
2) décomposer $F = \dfrac{1}{(X^n-1)^2}$

c) Pôles d'ordres supérieurs

La même démarche s'applique pour les pôles d'ordres α : si on sait factoriser $B = (X-a)^\alpha C$ avec $C(a) \neq 0$, le coefficient du terme $\dfrac{\lambda}{(X-a)^\alpha}$ est $\dfrac{A(a)}{C(a)}$, qu'on peut encore écrire $\dfrac{\alpha! A(a)}{B^{(\alpha)}(a)}$.

Pour les autres coefficients, c'est plus pénible. Alors on se débrouille comme on peut. Voici quelques idées.

— évaluer la fraction en une valeur
— évaluer une limite en l'infini
— utiliser la parité ou l'imparité de la fraction et l'unicité des coefficients

Exemples.

— décomposer $F = \dfrac{X+2}{X^2(X-2)^2}$
— décomposer $F = \dfrac{1}{X^2(X^2-1)^3}$

Un cas particulier à connaître : la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de $\dfrac{P'}{P}$.

3.6 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

La décomposition en éléments simples est plus compliquée à cause des facteurs irréductibles de degré 2. Les mêmes raisonnements s'appliquent en fait aux facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 7. *Soit $F \in K_-(X)$, mise sous forme irréductible, et π un facteur irréductible du dénominateur de F, α son exposant.*
Alors il existe un unique couple $(P, G) \in K[X] \times K_-(X)$ tel que

- $F = G + \dfrac{P}{\pi^\alpha}$,
- $\deg P < \alpha \deg \pi$,
- *π n'apparaît pas dans la décomposition en facteurs irréductibles du dénominateur de G.*

Et on peut décomposer ces parties comme les parties polaires.

Proposition 8. *Soit $P \in K[X]$, π un polynôme irréductible qui ne divise pas P et α un entier tel que $\alpha \deg \pi > \deg P$.*
Alors il existe un unique α-uplet $(P_1, \ldots, P_\alpha) \in K[X]^\alpha$ tel que $\dfrac{P}{\pi^\alpha} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{P_k}{\pi^k}$ et pour tout $k \in [\![1, \alpha]\!]$, $\deg P_k < \deg \pi$.

Alors on en déduit la version « réelle » du th. de décomposition en éléments simples.

Théorème 2. *Soit F une fraction rationnelle de $\mathbb{R}(X)$, B son dénominateur (quand elle est mise sous forme irréductible).*
On sait que B peut s'écrire $\displaystyle\prod_{p=1}^{r}(X - a_p)^{\alpha_p} \prod_{q=1}^{m}(X^2 + b_q X + c_q)^{\beta_q}$ où $a_1, \ldots, a_r$ sont les r racines réelles de B d'ordre de multiplicité $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et $b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_m$ sont $2m$ réels, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ des entiers non nuls tels que pour tout $q \in [\![1, m]\!]$, $\Delta_q = b_q^2 - 4c_q < 0$.
Il existe
- *un unique polynôme E*
- *des scalaires $\lambda_{k,j}$ où $k \in [\![1, r]\!]$ et $j \in [\![1, \alpha_k]\!]$*
- *des scalaires $\sigma_{k,j}, \tau_{k,j}$ où $k \in [\![1, m]\!]$ et $j \in [\![1, \beta_k]\!]$*

tels que

$$P = E + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(X - a_k)^j} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\beta_k} \frac{\sigma_{k,j} X + \tau_{k,j}}{(X^2 + b_k X + c_k)^j}$$

Les termes de la forme $\dfrac{\lambda}{(X-a)^j}$ sont appelés éléments simples de première espèce, les autres de la forme $\dfrac{\sigma X + \tau}{(X^2 + bX + c)^j}$ sont les éléments simples de seconde espèce.

Exercices :

1) décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \dfrac{1}{X^3 - 1}$
2) décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \dfrac{X}{X^4 + 1}$
3) décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \dfrac{X^2 - 1}{(X^3 + X)^2}$