Problème 1 - Une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes (P_n) de la façon suivante :

$$P_0 = X,\ P_1 = 3X - 4X^3 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2(1-2X^2)P_{n+1} - P_n.$$

Question 1)

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminez le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X divise P_n : on note Q_n le quotient de la division de P_n par X.

Question 2)

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, $P_n(\sin t) = \sin\Big((2n+1)t\Big)$.

b) Montrez que P_n est le seul polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie cette égalité.

Question 3) Déterminez les racines de P_n (vous pourrez commencer par chercher celles dans $[-1, +1]$) et donnez la factorisation irréductible de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Question 4)

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-X^2)P_n'' - XP_n' + (2n+1)^2 P_n = 0$.

b) Déterminez les valeurs de $P_n'(0)$, $P_n''(0)$, $P^{(3)}(0)$, $Q_n(0)$, $Q_n'(0)$, $Q_n''(0)$.

Question 5)

a) Montrez que pour presque tout x réel (*i.e.* sauf pour un nombre fini de réels), on a la relation

$$\frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2 - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

b) Déduisez-en que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{-Q_n''(0)}{2Q_n(0)}$$

Question 6)

a) Montrez que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ est bornée sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sans faire aucune étude de fonctions, juste en calculant une limite et en utilisant un théorème du cours.

b) Déduisez-en la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Devoir non surveillé 12 - Corrigé

Problème 1

Question 1)

a) On note $\mathrm{dom}(P)$ le coefficient dominant d'un polynôme P non nul.
Par récurrence double sur n : on pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat « $\deg P_n = 2n+1$ et $\mathrm{dom}(P_n) = (-4)^n$ ».
$\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vrais.
Si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vrais, alors on peut écrire $P_{n+1} = (-4)^{n+1}X^{2n+3} + Q$ où $\deg Q \leqslant 2n+2$, puis comme $\deg(P_n) = 2n+1 < \deg((1-2X^2)P_{n+1}) = 2+2n+3 = 2n+5$, on en déduit que $\deg P_{n+2} = \max(\deg P_n, \deg((1-2X^2)P_{n+1})) = 2n+5$ et $\mathrm{dom}(P_{n+2}) = 2\times(-2)\times \mathrm{dom}(P_{n+1}) = (-4)\times(-4)^{n+1} = (-4)^{n+2}$.
$\mathscr{P}(n+2)$ est donc vrai.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vrai.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2}(0) = 2P_{n+1}(0) - P_n(0)$ or $P_0(0) = P_1(0) = 0$ donc par une simple récurrence double, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = 0$ donc X divise P_n.

Question 2)

a) Par récurrence double encore en utilisant la formule de trigonométrie : $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ en remplaçant p par $2n+5$ et q par $2n+1$.
On obtient alors $\sin(2n+5)t + \sin(2n+1)t = 2\sin(2n+3)t\cos 2t = 2(1-2\sin^2 t)\sin(2n+3)t$.

b) Si un autre polynôme Q vérifie la même relation, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\sin t) - Q(\sin t) = 0$, donc le polynôme $P - Q$ a une infinité de racines (tous les réels compris entre -1 et 1) donc il est nul, autrement dit $P = Q$.

Question 3) Soit $x \in [-1, +1]$ une racine de P_n : elle peut s'écrire $x = \sin t$ avec $t \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$P(x) = 0 \iff P(\sin t) = 0 \iff \sin(2n+1)t = 0 \iff (2n+1)t \equiv 0\ [\pi] \iff t \equiv 0\ \left[\dfrac{\pi}{2n+1}\right]$ donc les racines de P_n dans $[-1, +1]$ sont les nombres $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Comme on a choisi $t \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, cela revient à choisir $k \in [\![-n, +n]\!]$.

On a donc trouvé $2n+1$ racines distinctes de P_n. Or P_n est de degré $2n+1$ donc il a au plus $2n+1$ racines, donc on les a toutes et et de plus elles sont simples.

Donc $P_n = (-4)^n \displaystyle\prod_{k=-n}^{+n}\left(X - \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.

Question 4)

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P_n(\sin t) = sin(2n+1)t$ donc en dérivant cette égalité, on obtient $\cos t\, P_n'(\sin t) = (2n+1)\cos(2n+1)t$, puis $-\sin t\, P_n'(\sin t) + \cos^2 t\, P_n''(\sin t) = -(2n+1)^2\sin(2n+1)t$.
Donc $(1-\sin^2 t)P_n''(\sin t) - \sin t\, P_n'(\sin t) + (2n+1)^2\sin(2n+1)t = 0$, c'est-à-dire $(1-\sin^2 t)P_n''(\sin t) - \sin t\, P_n'(\sin t) + (2n+1)^2 P_n(\sin t) = 0$.
Le polynôme $(1-X^2)P_n'' - XP_n' + (2n+1)^2 P_n$ a donc pour racines tous les réels de la forme $\sin t$, donc une infinité de racines. Donc il est nul, ce qu'on voulait démontrer.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cos t\, P_n'(\sin t) = (2n+1)\cos(2n+1)t$ donc en particulier en $t = 0$, on a $P_n'(0) = 2n+1$.
Puis en évaluant en 0 le polynôme précédent, on a $P_n''(0) = 0$. Et en dérivant ce polynôme et en l'évaluant en 0, on a $-2XP_n'' + (1-X^2)P_n^{(3)} - P_n' - XP_n'' + (2n+1)^2 P_n' = 0$ donc $P_n^{(3)}(0) - P_n'(0) + (2n+1)^2 P_n'(0) = 0$, ce qui donne $P_n^{(3)}(0) = -((2n+1)^2 - 1)(2n+1) = -(2n)(2n+1)(2n+2)$.
Par définition,$P_n = XQ_n$, donc $P_n' = XQ_n' + Q_n$, $P_n'' = 2Q_n' + XQ_n''$ et $P_n^{(3)} = 3Q_n'' + XQ_n^{(3)}$, donc en évaluant en 0 ces égalités, on obtient $Q_n(0) = (2n+1)$, $Q_n'(0) = 0$ et $Q_n''(0) = -\dfrac{(2n)(2n+1)(2n+2)}{3}$.

Question 5)

a) D'après la question 3, $Q_n = (-4)^n \displaystyle\prod_{-n\leqslant k\leqslant n, k\neq 0}\left(X - \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln|Q_n(x)|$, définie sur $\mathbb{R} - \left\{\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\ /\ -n \leqslant k \leqslant n \text{ et } k \neq 0\right\}$.

Quand cela a un sens, on a donc $f(x) = \ln(4^n) + \displaystyle\sum_{-n\leqslant k\leqslant n, k\neq 0} \ln\left|x - \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right|$.

Sur tout intervalle où elle est définie, cette fonction est dérivable (composée de fonctions dérivables) et pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{ \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \ / \ -n \leqslant k \leqslant n \text{ et } k \neq 0 \right\}$, $f'(x) = \frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} = \sum_{-n\leqslant k\leqslant n, k\neq 0} \frac{1}{x - \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$

Donc $\frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{x - \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x + \sin\left(\frac{j\pi}{2n+1}\right)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$

Donc $\frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{x - \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} + \frac{1}{x + \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{2x}{x^2 - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right]$

b) L'égalité précédente est valable sur l'intervalle $I = \left] -\sin\frac{\pi}{2n+1}, \sin\frac{\pi}{2n+1} \right[$, on peut donc encore la dériver puis l'évaluer en 0 :

pour tout $x \in I$, $\frac{Q_n Q_n'' - {Q_n'}^2}{Q_n^2} = \sum_{k=1}^{n} \left[2\frac{-x^2 - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\left(x^2 - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2} \right]$ puis $\frac{Q_n''(0)}{Q_n(0)} = -2\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right]$

Question 6)

a) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \sim \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^4} \sim \frac{\frac{x^3}{6} \times 2x}{x^4} \sim \frac{1}{3}$ (équivalents quand x tend vers 0 bien sûr).

Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ a une limite réelle en 0 : on la prolonge par continuité, elle devient alors continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc elle y est bornée.

b) De la question précédente, on déduit donc l'existence d'une constante K telle que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$-K + \frac{1}{\sin^2 x} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant K + \frac{1}{\sin^2 x}$$

Les réels $\frac{k\pi}{2n+1}$ sont tous dans cet intervalle quand k varie de 1 à n, donc on spécialise en chaque valeur et on additionne les inégalités, on obtient :

$$-Kn + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \right] \leqslant Kn + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right]$$

puis en utilisant la question 5b

$$-Kn - \frac{Q_n''(0)}{2Q_n(0)} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant Kn - \frac{Q_n''(0)}{2Q_n(0)}$$

puis en utilisant la question 4b

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(-Kn + \frac{2n(n+1)}{3} \right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(Kn + \frac{2n(n+1)}{3} \right)$$

Or $Kn + \frac{2n(n+1)}{3} \sim \frac{2n^2}{3}$ donc $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(Kn + \frac{2n(n+1)}{3} \right) \sim \frac{\pi^2}{6}$ et de même pour $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(-Kn + \frac{2n(n+1)}{3} \right)$

Donc d'après le th. d'encadrement, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ tend vers $\frac{\pi^2}{6}$.