Problème 1 - Polynômes de Tchebychef

On définit une suite de polynômes par récurrence : $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$.

Partie 1 - Un résultat classique

Montrez par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{*n}$ et $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\arg a_k \equiv \arg a_1\ [2\pi]$. Vous pourrez montrer d'abord que cette proposition est vraie dans le cas où $n = 2$.

Partie 2 - Propriétés générales

Question 1) Calculez P_2, P_3, P_4. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos t) = \cos nt$.

Question 2) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} quand $n \geqslant 1$.

Question 3) Déterminez les racines de P_n (on pourra d'abord chercher les racines comprises entre -1 et +1).

Partie 3 - Détermination d'un minimax.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose U_n l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaires et de degré n.

Question 1)

a) Soit $P \in U_n$, justifiez pourquoi $\delta(P) = \max\left\{|P(t)|\ /\ t \in [-1, +1]\right\}$ existe.

b) Justifiez l'existence de $D_n = \inf\left\{\delta(P)/P \in U_n\right\}$. Calculez D_0. Dans toute la suite, il sera sous-entendu que $n \geqslant 1$.

Question 2) Soit $Q_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} P_n$ (appelé polynôme de Tchebychef normalisé). Justifiez que $Q_n \in U_n$ et que $\delta(Q_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Question 3) Soit $z_k = e^{ik\pi/n}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculez $\sum_{k=0}^{2n-1} (z_k)^p$ en fonction de p.

Question 4) Soit $P \in U_n$ et $R = X^n P\left(\dfrac{1}{2}(X + \dfrac{1}{X})\right)$.

a) Montrez que R est en fait un polynôme dont vous préciserez les termes de plus haut et plus bas degré.

b) Montrez que si $z \in \mathbb{U}$, alors $|R(z)| \leqslant \delta(P)$.

c) Montrez que si a_0 et a_{2n} sont les coefficients de degré 0 et $2n$ de R, alors $\sum_{k=0}^{2n-1} R(z_k) = 2n(a_0 + a_{2n})$.

d) Déduisez-en que $\delta(P) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Question 5) Concluez : justifiez que D_n est en fait un minimum et donnez sa valeur (d'où le nom de D_n : minimax, c'est-à-dire minimum d'une famille de maximums).

Question 6) On veut déterminer les polynômes $P \in U_n$ tels que $\delta(P) = D_n$. Soit P un tel polynôme.

a) Avec les mêmes notations que dans la question 4, montrez qu'alors on a $\dfrac{2n}{2^{n-1}} = \left|\sum_{k=0}^{2n-1} R(z_k)\right| = \sum_{k=0}^{2n-1} |R(z_k)|$, puis que pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, $|R(z_k)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b) Déduisez-en que les complexes $R(z_k)$ ($k \in [\![0, 2n-1]\!]$) ont tous le même argument, puis que cet argument est forcément 0 modulo 2π, enfin que $R(z_k) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

c) Pour $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, comparez $P(\cos \dfrac{k\pi}{n})$ et $Q_n(\cos \dfrac{k\pi}{n})$ et montrez que $P = Q_n$.

Conclusion : on a donc montré que D_n vaut $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ et que c'est un minimum atteint une seule fois par le polynôme de Tchebychef normalisé.

Problème 1

Partie 1

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « si $a_1, ..., a_n$ sont n complexes non nuls tels que $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, alors les complexes $a_1, ..., a_n$ ont tous le même argument modulo 2π ».

$\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si a, b sont deux complexes non nuls tels que $|a+b| = |a| + |b|$, alors $\left|1 + \frac{b}{a}\right| = 1 + \left|\frac{b}{a}\right|$; on note $\frac{b}{a} = r.e^{i\theta}$ avec $r > 0$, on a donc $(1 + r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = (1+r)^2$

donc $2r\cos\theta = 2r$, donc comme $r \neq 0$, on a $\cos\theta = 1$ donc $\frac{b}{a}$ est un réel positif : les deux complexes a et b ont donc le même argument.

Donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors soit maintenant $a_1, ..., a_{n+1}$ sont $n+1$ complexes non nuls tels que $\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$. On pose $a = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $b = a_{n+1}$. D'après l'inégalité triangulaire, $|a+b| \leqslant |a| + |b| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |b|$. Or dans cette double inégalité, les deux termes extrêmes sont égaux, donc cette double inégalité se réduit en fait à deux égalités : $|a+b| = |a| + |b| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |b|$: on en déduit que $|a| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ et que $|a+b| = |a| + |b|$.

Par hypothèse de récurrence, la première égalité donne que tous les complexes $a_1, ..., a_n$ ont le même argument α, donc leur somme a a aussi pour argument α. La seconde égalité donne alors que a et b ont le même argument (propriété vraie au rang 2), donc finalement tous les complexes $a_1, ..., a_{n+1}$ ont le même argument. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Partie 2

Question 1) $P_2 = 2X^2 - 1$, $P_3 = 4X^3 - 3X$, $P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos t) = \cos nt$ ».

$\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

Si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on substitue X par $\cos t$ dans la relation de récurrence liant les polynômes, on obtient

$$P_{n+2}(\cos t) = 2\cos t\ P_{n+1}(\cos t) - P_n(\cos t) = 2\cos t\cos(n+1)t - \cos nt$$

On utilise une formule de trigonométrie : $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ en posant $a = (n+1)t$ et $b = t$, ce qui donne $2\cos t\cos(n+1)t = \cos(n+2)t + \cos nt$, donc finalement $P_{n+2}(\cos t) = \cos(n+2)t$. Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Question 2) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « P_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} quand $n \geqslant 1$ ».

$\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

Si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\deg P_{n+1} = n+1$ donc $\deg(2XP_{n+1}) = n+2$, et $\deg P_n = n$, donc $\deg(2XP_{n+1}) > \deg P_n$ donc $\deg P_{n+2} = \max(\deg(2XP_{n+1}),\ \deg P_n) = n+2$.

De plus, comme $\deg(2XP_{n+1}) > \deg P_n$, alors le coefficient dominant de P_{n+2} est égal à celui de $2XP_{n+1}$, c'est-à-dire 2 fois celui de P_{n+1} donc le coefficient dominant de P_{n+2} est $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Question 3) Soit x une racine réelle de P_n comprise entre -1 et 1 : elle peut donc se mettre sous la forme $x = \cos t$. Alors on a $P_n(x) = P_n(\cos t) = 0$. D'après un résultat précédent, on en déduit que $0 = \cos nt$, donc $nt \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, c'est-à-dire $t = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ où k est un entier relatif. Donc $x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ où k est un entier relatif.

A priori, k peut prendre toute valeur dans $\mathbb{Z}$. Or pour définir x, il suffit de connaître t modulo 2π, donc on peut se contenter de $2n$ valeurs successives entières pour la variable k.

Par exemple, on prend $k \in \{-n, -n+1, ..., 0, 1, ..., n-1\}$.

cos est paire donc pour $k \in \{-n, ..., -1\}$, $\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} = \cos\dfrac{-(2k+1)\pi}{2n} = \cos\dfrac{(2p+1)\pi}{2n}$ en posant $p = -k-1$. Or quand k varie de $-n$ à -1, p varie de $n-1$ à 1, donc on retrouve les mêmes valeurs pour x quand k varie de $-n$ à -1 que quand k varie de 0 à $n-1$, donc finalement on trouve déjà n racines réelles distinctes pour P_n : les nombres $\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in \{0, ..., n-1\}$ (remarque : ces nombres sont bien distincts, ce qui permet bien d'affirmer qu'il y en a exactement n — on ne compte pas deux fois le même nombre —).

Or P_n est de degré n, donc il ne peut pas avoir plus de n racines distinctes. Comme on en a déjà trouvé n, il est inutile de chercher d'autres racines dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, les racines de P_n sont les n réels $\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in \{0, ..., n-1\}$.

Partie 3

Question 1)

a) Sur le segment $[-1, +1]$, la fonction $t \mapsto |P(t)|$ est continue donc elle y est bornée et atteint ses bornes (th. des bornes atteintes).
Autrement dit, $\max\left\{|P(t)| \ / \ t \in [-1, +1]\right\}$ existe.

b) L'ensemble $\left\{\delta(P)/P \in U_n\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (elle contient $\delta(X^n)$, puisque X^n est un polynôme unitaire de degré n) et minorée par 0 (elle ne contient que des valeurs positives), donc d'après le th. de la borne inférieure, D_n existe.
$U_0 = \{1\}$ donc $\left\{\delta(P)/P \in U_0\right\} = \{1\}$ donc $D_0 = 1$.

Question 2) D'après la partie 1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n est un polynôme unitaire de degré n.

De plus, pour tout $t \in [-1, +1]$, on note $t = \cos\theta$, donc $Q_n(t) = \dfrac{1}{2^{n-1}} P_n(\cos\theta) = \dfrac{1}{2^{n-1}} \cos n\theta$,

donc $|Q_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et en plus, on a égalité pour $t = 1$ (i.e. $\theta = 0$). Donc pour ce polynôme Q_n, $\delta(Q_n)$ est mieux qu'une borne supérieure, c'est en fait un maximum égal à $\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Question 3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} (z_k)^p = \sum_{k=0}^{2n-1} e^{ikp\pi/n} = \sum_{k=0}^{2n-1} \left(e^{ip\pi/n}\right)^k$.

Ceci est la somme des $2n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\rho = e^{ip\pi/n}$, donc on distingue deux cas :

— si $\rho = 1$, c'est-à-dire si p est un multiple de $2n$, alors la somme vaut $2n$

— sinon, cette somme vaut $\dfrac{1-\rho^{2n}}{1-\rho}$, or $\rho^{2n} = e^{2ip\pi} = 1$ donc la somme vaut 0.

Question 4)

a) On note $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, où $b_n = 1$. Alors $R = X^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k \left(\frac{X^2+1}{2X}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{2^k}(X^2+1)^k X^{n-k}$.
Dans cette somme, les exposants sur les symboles X sont tous positifs, donc R est bien un polynôme
De plus, chaque terme de la somme est de degré $n+k$, donc le terme de plus haut degré est celui obtenu pour $k = n$, c'est-à-dire $\dfrac{b_n}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$. R est donc un polynôme de degré $2n$.
Chaque terme de la somme est de valuation $n-k$, donc le terme de plus bas degré est celui obtenu pour $k = n$, c'est-à-dire $\dfrac{b_n}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$. R est donc un polynôme de valuation 0.

b) Si $z \in \mathbb{U}$, alors $z = e^{i\theta}$ donc $R(z) = e^{in\theta} P(\cos\theta)$, donc $|R(z)| = |e^{in\theta}| \times |P(\cos\theta)| = |P(\cos\theta)| \leqslant \delta(P)$ puisque $\cos\theta \in [-1, +1]$.

c) $R = \displaystyle\sum_{p=0}^{2n} a_p X^p$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} R(z_k) = \sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{p=0}^{2n} a_p z_k^p = \sum_{p=0}^{2n}\left(a_p \sum_{k=0}^{2n-1} z_k^p\right) = a_0 \times 2n + a_{2n} \times 2n = \frac{n}{2^{n-2}}$
puisqu'on a montré que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} z_k^p$ vaut 0 sauf si p est un multiple de $2n$, auquel cas elle vaut $2n$.

d) $\dfrac{n}{2^{n-2}} = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} R(z_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{2n-1} |R(z_k)| \leqslant 2n \times \delta(P)$, donc $\delta(P) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Question 5) On a montré dans la question précédente que pour tout $P \in U_n$, $\delta(P) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, donc ceci prouve que $\frac{1}{2^{n-1}}$ est un minorant de l'ensemble $\{\delta(P) \;/\; P \in U_n\}$. De plus, $\frac{1}{2^{n-1}}$ appartient à cet ensemble puisque $\frac{1}{2^{n-1}} = \delta(Q_n)$. Donc ceci prouve que $\frac{1}{2^{n-1}}$ est le minimum de cet ensemble, et donc a fortiori sa borne inférieure.

Question 6)

a) Dans la question 4, on a montré que $\sum_{k=0}^{2n-1} R(z_k) = \frac{2n}{2^{n-1}}$, donc $\left|\sum_{k=0}^{2n-1} R(z_k)\right| = \left|\frac{2n}{2^{n-1}}\right| = \frac{2n}{2^{n-1}}$.

Et aussi $\left|\sum_{k=0}^{2n-1} R(z_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{2n-1} |R(z_k)| \leqslant 2n\delta(P) = \frac{2n}{2^{n-1}}$.

Donc finalement, on a $\frac{2n}{2^{n-1}} = \left|\sum_{k=0}^{2n-1} R(z_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{2n-1} |R(z_k)| \leqslant \frac{2n}{2^{n-1}}$.

On en déduit donc que toutes ces inégalités sont en fait des égalités, d'où le résultat voulu.

b) De l'égalité $\left|\sum_{k=0}^{2n-1} R(z_k)\right| = \sum_{k=0}^{2n-1} |R(z_k)|$, on tire que les nombres $R(z_k)$ ($k \in [\![0, 2n-1]\!]$) ont tous le même argument d'après la partie 1. On note α cet argument.

On a donc $S = \sum_{k=0}^{2n-1} R(z_k) = \sum_{k=0}^{2n-1} |R(z_k)|\, e^{i\alpha} = e^{i\alpha} \sum_{k=0}^{2n-1} |R(z_k)|$. Or cette somme S vaut aussi $\frac{2n}{2^{n-1}}$ donc c'est un réel, et donc on en déduit que $\alpha \equiv 0\ [2\pi]$.

Les $2n$ complexes $R(z_k)$ sont donc en fait des réels positifs. D'après la question 4.b., ils sont tous inférieurs ou égaux à $\delta(P) = \frac{1}{2^{n-1}}$. On considère la somme $\sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - R(z_k)\right)$: c'est une *somme de réels positifs* et elle est *nulle* (puisqu'elle vaut $\sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) - \sum_{k=0}^{2n-1} (R(z_k)) = 2n \times \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n}{2^{n-1}} = 0$), donc forcément tous ses termes sont nuls, autrement dit pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, $R(z_k) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

c) On a montré dans la question 4.b. que $R(e^{i\theta}) = e^{in\theta} P(\cos\theta)$, donc pour $k \in \{0, ...2n-1\}$, $P(\cos\frac{k\pi}{n}) = e^{-ink\pi/n} R(z_k) = (-1)^k \times \frac{1}{2^{n-1}}$.

Or on a aussi $Q_n(\cos\frac{k\pi}{n}) = \frac{1}{2^{n-1}} P_n(\cos\frac{k\pi}{n}) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\left(n\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}(-1)^k$.

Les deux polynômes P et Q_n sont de degré n et ont les mêmes valeurs sur $n+1$ réels distincts, donc le polynôme $P - Q_n$ possède $n+1$ racines distinctes, or il est de degré au plus n, donc il est nul, autrement dit $P = Q_n$.