Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème 1 (d'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

La démonstration est technique et longue, mais n'utilise que des résultats du cours de cette année. Elle est hors-programme.

Démonstration. Elle se fait par l'absurde. Dans un premier temps, on montre que la fonction $z \mapsto |P(z)|$ admet un minimum sur $\mathbb{C}$ en un point z_0, puis on s'arrange pour trouver proches de z_0 des points où elle va prendre des valeurs encore plus petites, ce qui contredit la minimalité de $|P(z_0)|$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. On suppose que P n'a pas de racine complexe.

Étape 1 : justification de l'existence de z_0.

On note $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $a_n \neq 0$.

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k + a_n z^n\right| \geqslant |a_n z^n| - \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right|$ d'après l'inégalité triangulaire.

Donc pour $z \neq 0$, $|P(z)| \geqslant |z|^n \left(|a_n| - \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}}\right|\right)$.

Or $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}}$ encore par inégalité triangulaire, donc d'après le th. d'encadrement,

quand $|z| \to +\infty$, $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}}\right| \longrightarrow 0$, donc $|a_n| - \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}}\right| \longrightarrow |a_n| > 0$, donc $|P(z)| \longrightarrow +\infty$.

Alors, pour tout réel A, il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| > R$, alors $|P(z)| \geqslant A$.

On spécialise $A \leftarrow |P(0)|$: il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| > R$, alors $|P(z)| \geqslant |P(0)|$ **[1]**.

On note $D = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| \leqslant R\}$, puis $m = \inf\limits_{z \in D} |P(z)|$ (qui existe bien, puisque la fonction $z \mapsto |P(z)|$ est positive donc minorée).

D'après la caractérisation équivalente de la borne inférieure, il existe une suite (u_n) à termes dans D telle que la suite $(|P(u_n)|)$ converge vers m.

Cette suite u est bornée, donc d'après le th. de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ et un complexe $z_0 \in D$ tels que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers z_0.

Alors par opérations sur les suites convergentes, $\big(P(u_{\varphi(n)})\big)$ converge vers $P(z_0)$,

donc $\big|P(u_{\varphi(n)})\big| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |P(z_0)|$.

D'autre part, $(|P(u_n)|)$ converge vers m, donc d'après le th. des suites extraites, $(|P(u_{\varphi(n)}|)$ converge vers m.

Donc par unicité de la limite, $|P(z_0)| = m$.

Ceci prouve donc que m, borne inférieure sur D, est en fait un minimum sur D.

On a donc : pour tout $z \in D$, $|P(z_0)| \leqslant |P(z)|$, en particulier $|P(z_0)| \leqslant |P(0)|$ (car $0 \in D$!).

Or pour tout $z \notin D$, $|P(0)| \leqslant |P(z)|$ (voir **[1]**), donc finalement, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z_0)| \leqslant |P(z)|$.

Donc $m = |P(z_0)|$ est en fait le minimum de la fonction $z \mapsto |P(z)|$ sur $\mathbb{C}$ tout entier. Comme P ne s'annule pas, $P(z_0) \neq 0$ donc $m > 0$.

Étape 2 : on s'approche judicieusement de z_0.

On procède à un changement de variable pour se faciliter la suite qui est déjà largement assez technique comme ça.

On pose maintenant $Q = \dfrac{P(X + z_0)}{P(z_0)}$ (ce qui revient à ramener le problème en 0) : Q est un polynôme de degré n tel que $Q(0) = 1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|Q(z)| \geqslant 1$ **[2]**.

Le coefficient constant de Q est donc 1. On pose k l'indice du premier coefficient non nul de Q qui suit le coefficient constant 1, de sorte qu'on puisse écrire

$$Q = 1 + cX^k + X^{k+1}R$$

où $k \in \mathbb{N}^*$, R est un polynôme et $c \neq 0$. Cet indice k existe bien, car Q n'est pas constant donc il y a d'autres termes que le terme constant dans Q.

On écrit z sous forme trigonométrique : $z = re^{i\theta}$ où $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, de sorte que

$$Q(z) = 1 + c\,e^{ik\theta}r^k + r^{k+1}e^{i(k+1)\theta}R(re^{i\theta})$$

Quand r tend vers 0, $R(re^{i\theta})$ tend vers une limite finie $R(0)$, donc la fonction $r \mapsto R(re^{i\theta})$ est bornée au voisinage de 0 :

il existe $K > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $r \in [0, \alpha]$, $|R(re^{i\theta})| \leqslant K$,

donc par inégalité triangulaire,

$$|Q(z)| \leqslant |1 + c\,e^{ik\theta}r^k| + r^{k+1}K$$

C'est le moment de bien choisir θ : on le choisit tel que $c\,e^{ik\theta}$ soit un réel strictement négatif (c'est possible, il suffit de bien l'ajuster en fonction de l'argument de c, par exemple $\theta = \dfrac{\pi - \arg c}{k}$).

On note alors $s = -c\,e^{ik\theta}$, réel positif, pour écrire alors

$$|Q(z)| \leqslant |1 - sr^k| + Kr^{k+1}$$

Puis on s'arrange pour que $1 - sr^k$ soit un réel strictement positif : il suffit que $r \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt[k]{s}}\right[$.

Alors en posant $\beta = \min(\alpha, \dfrac{1}{\sqrt[k]{s}}) > 0$, on a : pour tout $r \in [0, \beta[$,

$$|Q(z)| \leqslant 1 - sr^k + Kr^{k+1} = 1 - sr^k\left(1 - \frac{K}{s}r\right)$$

Puis on s'arrange pour que $1 - \dfrac{K}{s}r$ soit un réel strictement positif : il suffit que $r \in \left[0, \dfrac{s}{K}\right[$.

Alors en posant $\gamma = \min(\beta, \dfrac{s}{K}) > 0$, on a : pour tout $r \in]0, \gamma[$,

$$|Q(z)| \leqslant 1 - sr^k + Kr^{k+1} = 1 - sr^k\left(1 - \frac{K}{s}r\right) < 1$$

Autrement dit, on a montré que si on choisit judicieusement z proche de 0 en fixant son argument soigneusement et son module assez petit, alors on obtient des valeurs de $|Q(z)|$ qui sont strictement inférieures à 1, ce qui contredit **[2]**.

Conclusion : le polynôme P possède donc au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Remarque : ce théorème est absolument non effectif, il ne permet pas de calculer une racine de P, ni de manière exacte (ce qui sait être en général impossible depuis les travaux d'Abel et Galois vers 1830), ni de manière approchée. Il est donc d'un intérêt purement théorique, mais néanmoins essentiel !