Mp2i - Programme de colles 17

Semaine du 7 au 11 février 2022

1 Polynômes réels ou complexes

K un sous-corps de $\mathbb{C}$, en pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Définition d'un polynôme, ensemble $K[X]$. Degré, coefficient dominant. Opérations sur les polynômes (somme, produit par un scalaire, produit, composition) et degrés. $K[X]$ est un anneau commutatif intègre, qui contient K par identification des constantes et des polynômes constants. Fonction polynôme associée.

b) Divisibilité dans $K[X]$. Racines d'un polynôme, division par $X-a$, nombre de racines distinctes d'un polynôme. Conditions pour qu'un polynôme soit nul. Bijection entre les fonctions polynômes et les polynômes (à titre culturel, les polynômes de $\mathbb{F}_3[X]$ ont été présentés pour montrer l'intérêt de la distinction entre ces objets).

c) Division euclidienne.

d) Dérivation des polynômes. Racines simples et multiples, les racines multiples de P sont les racines communes à P et P'.

e) Formule de Taylor, ordre de multiplicité d'une racine, détermination de l'ordre de multiplicité d'une racine.

f) Th. de D'Alembert-Gauss, factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, racines complexes d'un polynôme réel, factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Démonstrations à connaître :

— existence dans le th. de division euclidienne
— formule de Taylor
— lien entre ordre de multiplicité d'une racine et annulations des dérivées successives