L'usage des calculatrices est autorisé.

Rappelez-vous tout ce qui a été dit lors de la correction des DS précédents ! N'oubliez pas que le concepteur du sujet est votre ami, mais pas le correcteur ! Lisez donc l'énoncé attentivement, vérifiez la cohérence de vos résultats à l'aide de l'énoncé et rédigez soigneusement sans vouloir tout faire et sans étourderie.

Exercice

On définit la suite u par récurrence en posant $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+e^{u_n}}$.

a) On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

b) Montrez que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution notée a et que $a \in]0,1[$.

c) Justifiez que la suite u converge vers a.

d) Justifiez que u_{15} possède au moins 8 décimales communes avec a.

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $r_n = \sqrt[n]{n}$. On définit $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}\ln x} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln x\right)$.

a) Exprimez r_n à l'aide de f, puis justifiez l'existence d'un réel $c_n \in]n, n+1[$ tel que $r_{n+1} - r_n = \dfrac{1-\ln c_n}{c_n^2} f(c_n)$.

b) Montrez que la suite (r_n) est décroissante à partir du rang 3.

c) Montrez : $r_{n+1} - r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln n}{n^2}$.

Problème 1 - Une équation fonctionnelle

Le but du problème est de déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ f(x) + x = 2f(x)$.

Soit f une solution du problème.

Question 1) Montrez que f est injective. On rappelle qu'une fonction est dite injective quand elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Question 2) Montrez alors que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Quelle est la monotonie de $f \circ f$? Déduisez-en que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 3)

a) Justifiez l'existence de $\ell = \lim\limits_{+\infty} f \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

b) Montrez que $\ell = +\infty$.

Question 4) Montrez que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $\Delta f = f - \mathrm{Id}$.

Question 5) Soit $x \in \mathbb{R}$: on définit la suite u par récurrence en posant $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrez que la suite u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\,\Delta f(x) + x$.

Les valeurs de la suite u sont $x, f(x), f \circ f(x), \ldots$: on note f^n la composée de f par elle-même n fois de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^n(x)$. On a donc montré : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^n(x) = n\,\Delta f(x) + x$.

Question 6) On suppose qu'il existe $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\Delta f(x_0) \neq \Delta f(x_1)$.

On note $h_0 = \Delta f(x_0)$, $h_1 = \Delta f(x_1)$: parmi ces deux nombres, l'un est non nul, on peut supposer qu'il s'agit de h_0. Dans un premier temps, on suppose même $h_0 > 0$.

a) Justifiez l'existence d'un entier relatif p tel que $x_0 + ph_0 \leqslant x_1 < x_0 + (p+1)h_0$.

b) Montrez que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $x_0 + (p+q)h_0 \leqslant x_1 + qh_1 < x_0 + (p+q+1)h_0$: vous pourrez utiliser la fonction f^q.

c) En faisant tendre q vers $+\infty$, aboutissez à une contradiction.

d) Que pouvez-vous dire si maintenant on suppose $h_0 < 0$?

Question 7) Déterminez l'ensemble des solutions du problème.