L'usage des calculatrices est autorisé.

Rappelez-vous tout ce qui a été dit lors de la correction des DS précédents ! N'oubliez pas que le concepteur du sujet est votre ami, mais pas le correcteur ! Lisez donc l'énoncé attentivement, vérifiez la cohérence de vos résultats à l'aide de l'énoncé et rédigez soigneusement sans vouloir tout faire et sans étourderie.

Exercice

On définit la suite u par récurrence en posant $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+e^{u_n}}$.

a) On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

b) Montrez que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution notée a et que $a \in \,]0, 1[$.

c) Justifiez que la suite u converge vers a.

d) Justifiez que u_{15} possède au moins 8 décimales communes avec a.

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $r_n = \sqrt[n]{n}$. On définit $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}\ln x} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln x\right)$.

a) Exprimez r_n à l'aide de f, puis justifiez l'existence d'un réel $c_n \in \,]n, n+1[$ tel que $r_{n+1} - r_n = \dfrac{1-\ln c_n}{c_n^2} f(c_n)$.

b) Montrez que la suite (r_n) est décroissante à partir du rang 3.

c) Montrez : $r_{n+1} - r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln n}{n^2}$.

Problème 1 - Une équation fonctionnelle

Le but du problème est de déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ f(x) + x = 2f(x)$.

Soit f une solution du problème.

Question 1) Montrez que f est injective. On rappelle qu'une fonction est dite injective quand elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Question 2) Montrez alors que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$. Quelle est la monotonie de $f \circ f$? Déduisez-en que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 3)

a) Justifiez l'existence de $\ell = \lim\limits_{+\infty} f \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

b) Montrez que $\ell = +\infty$.

Question 4) Montrez que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $\Delta f = f - \mathrm{Id}$.

Question 5) Soit $x \in \mathbb{R}$: on définit la suite u par récurrence en posant $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrez que la suite u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\,\Delta f(x) + x$.

Les valeurs de la suite u sont $x, f(x), f \circ f(x), \ldots$: on note f^n la composée de f par elle-même n fois de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^n(x)$. On a donc montré : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^n(x) = n\,\Delta f(x) + x$.

Question 6) On suppose qu'il existe $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\Delta f(x_0) \neq \Delta f(x_1)$.

On note $h_0 = \Delta f(x_0)$, $h_1 = \Delta f(x_1)$: parmi ces deux nombres, l'un est non nul, on peut supposer qu'il s'agit de h_0. Dans un premier temps, on suppose même $h_0 > 0$.

a) Justifiez l'existence d'un entier relatif p tel que $x_0 + ph_0 \leqslant x_1 < x_0 + (p+1)h_0$.

b) Montrez que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $x_0 + (p+q)h_0 \leqslant x_1 + qh_1 < x_0 + (p+q+1)h_0$: vous pourrez utiliser la fonction f^q.

c) En faisant tendre q vers $+\infty$, aboutissez à une contradiction.

d) Que pouvez-vous dire si maintenant on suppose $h_0 < 0$?

Question 7) Déterminez l'ensemble des solutions du problème.

Devoir surveillé 6 - Corrigé

Exercice

a) f est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$.
Par équivalences successives,
$|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4} \iff \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \leqslant \dfrac{1}{4} \iff 4e^x \leqslant 1 + e^{2x} + 2e^x \iff 0 \leqslant e^{2x} - 2e^x + 1 \iff 0 \leqslant (e^x - 1)^2$
cette dernière inégalité est vraie donc la première l'est aussi.

b) D'après l'inégalité des acc. finis, f est $\dfrac{1}{4}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, donc contractante.
L'intervalle $\mathbb{R}$ est fermé, f est contractante sur $\mathbb{R}$ donc d'après le cours, la fonction f possède un unique point fixe.
De plus $f(0) - 0 = \dfrac{1}{2} > 0$ et $f(1) - 1 = \dfrac{-e}{1+e} < 0$, donc comme $x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[0,1]$, le th. des valeurs intermédiaires assure qu'il existe un point fixe entre 0 et 1. Comme ce point fixe est unique, on en déduit $a \in]0,1[$.

c) Toujours le même théorème du cours : on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - a|$ puis que $|u_n - a| \leqslant \dfrac{1}{4^n}|u_0 - a|$ par récurrence immédiate.
Par encadrement, la suite u converge vers a.

d) L'inégalité précédente donne en particulier : $|u_{15} - a| \leqslant \dfrac{1}{4^{15}}|0 - a| \leqslant \dfrac{1}{4^{15}}$ car $0 \leqslant a \leqslant 1$.
Or $0,000\,000\,000\,9 \leqslant \dfrac{1}{4^{15}} \leqslant 0,000\,000\,001\,0 = 10^{-9}$ donc $|u_{15} - a| \leqslant 10^{-9}$ donc les huit premières décimales de u_{15} sont les mêmes que celles de a (sinon on aurait $|u_{15} - a| \geqslant 10^{-8}$).

Exercice

a) $r_n = n^{1/n} = \exp\left(\dfrac{1}{n}\ln n\right) = f(n)$
donc $r_{n+1} - r_n = f(n+1) - f(n)$.
f est évidemment de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, donc continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$, donc d'après le th. des accroissements finis, il existe $c_n \in]n, n+1[$ tel que $r_{n+1} - r_n = f'(c_n)$. Or par dérivation d'une composée, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}\exp\left(\dfrac{1}{x}\ln x\right) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} f(x)$.
Donc $r_{n+1} - r_n = \dfrac{1 - \ln c_n}{c_n^2} f(c_n)$.

b) Pour $n \geqslant 3$, $c_n \in]n, n+1[$ donc $c_n \geqslant 3 \geqslant e$, donc $\ln c_n > 1$, donc $r_{n+1} - r_n < 0$.
La suite (r_n) est donc décroissante à partir du rang 3.

c) Puisque $c_n \in]n, n+1[$, on a donc $1 \leqslant \dfrac{c_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ donc par th. d'encadrement, $\dfrac{c_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
En particulier, c_n tend vers $+\infty$, donc $\ln c_n \sim \ln n$, puis $\dfrac{1 - \ln c_n}{c_n^2} \sim \dfrac{-\ln n}{n^2}$.
De plus, $\dfrac{1}{c_n}\ln c_n \sim \dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $f(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$, donc $f(c_n) \sim 1$.
Donc finalement, $r_{n+1} - r_n \sim \dfrac{-\ln n}{n^2}$.

Problème 1

Question 1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors $f(f(x)) = f(f(y))$ donc $f \circ f(x) = f \circ f(y)$, donc comme pour tout t, $t = 2f(t) - f \circ f(t)$, on en déduit que $x = 2f(x) - f \circ f(x) = 2f(y) - f \circ f(y) = y$.

On a montré : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, c'est-à-dire f injective.

Question 2) f est injective et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc d'après un th. du cours, f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Que f soit strictement décroissante ou strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors dans les deux cas $f \circ f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc $x \mapsto f \circ f(x) + x$ l'est aussi comme somme de fonctions strictement croissantes, donc on en déduit que $2f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 3)

a) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc d'après le th. de la limite monotone, f a une limite réelle ou infinie en $+\infty$.

b) $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ et f est continue en ℓ donc par composition des limites, $f\circ f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(\ell)$, donc par opérations sur les limites, $2f(x) = f\circ f(x) + x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc $\ell = +\infty$.

Question 4) Le même raisonnement en $-\infty$ montre que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$. Donc f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et a des limites infinies en les infinis, donc d'après le th. de bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Question 5)

a) On spécialise en $x = u_n$: $f(f(u_n)) + u_n = 2f(u_n)$ donc $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}$, ou encore $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$.

b) L'équation caractéristique associée à cette suite est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui a une unique racine double 1, donc d'après le cours, il existe deux constantes a et b telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a\times 1^n + b\times n\times 1^n = a + bn$.
Pour $n = 0$, on obtient $u_0 = a = x$ et pour $n = 1$, $u_1 = f(x) = a + b$ donc $b = f(x) - x = \Delta f(x)$.
Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = n\,\Delta f(x) + x$.

Question 6)

a) La double inégalité est équivalente à $p \leqslant \dfrac{x_1 - x_0}{h_0} < p+1$, donc il faut et il suffit de prendre $p = \left\lfloor \dfrac{x_1 - x_0}{h_0} \right\rfloor$.

b) La fonction f^q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions strictement croissantes) donc en appliquant cette fonction sur les membres de l'inégalité précédente, on obtient $f^q(x_0 + ph_0) \leqslant f^q(x_1) < f^q(x_0 + (p+1)h_0)$.
D'après l'étude de la suite précédente, $x_0 + ph_0 = f^p(x_0)$ et $x_0 + (p+1)h_0 = f^{p+1}(x_0)$ donc $f^q(f^p(x_0)) = f^{p+q}(x_0) \leqslant f^q(x_1) < f^{p+q+1}(x_0)$, ce qui revient à dire $x_0 + (p+q)h_0 \leqslant x_1 + qh_1 < x_0 + (p+q+1)h_0$.

c) On divise par $q \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{x_0 + (p+q)h_0}{q} \leqslant \dfrac{x_1 + qh_1}{q} < \dfrac{x_0 + (p+q+1)h_0}{q}$, puis on fait tendre q vers $+\infty$. Par passage à la limite on obtient $h_0 \leqslant h_1 \leqslant h_0$, donc $h_0 = h_1$, ce qui est contradictoire.

d) On refait la même chose mais en partant d'une inégalité $x_0 + (p+1)h_0 < x_1 \leqslant x_0 + ph_0$.
Ceci prouve donc que la fonction Δf est constante.

Question 7) On a donc prouvé que si f est solution, alors Δf est constante donc f est de la forme $x \mapsto x + c$ où $c\in\mathbb{R}$.

On vérifie que toutes ces fonctions sont effectivement solutions (c'est évident). Donc les solutions sont les fonctions $x \mapsto x+c$ où $c \in \mathbb{R}$.