Problème 1

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f et par convention, $f^{(0)} = f$.

Question 1)

a) Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est définie sur $]-1,+1[$ et qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in]-1,+1[$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^n\sqrt{1-x^2}}$.

Vous donnerez au passage une relation de récurrence liant P_{n+1} à P_n et P'_n.

b) Justifiez pour chaque entier n l'unicité d'un tel polynôme P_n.

c) Donnez les expressions de $P_0, P_1, ..., P_4$.

Question 2) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(1) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$. Déduisez-en une expression de $P_n(1)$ faisant intervenir $(2n)!$, $n!$ et 2^n. De même, que vaut $P_n(-1)$?

Question 3)

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n : on pourra faire une récurrence et écrire $P_n = aX^n + Q$ avec $\deg Q \leqslant n-1$.

b) On note a_n le coefficient dominant de P_n. Donnez une relation liant a_{n+1} et a_n

c) Déterminez a_n en fonction de n.

Question 4) Un polynôme A est dit pair si et seulement si $A(-X) = A$ et impair si et seulement si $A(-X) = -A$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de même parité que n.

Question 5)

a) Donnez deux fonctions a et b telles que pour tout $x \in]-1,1[$, $a(x)f'(x) + b(x)f(x) = 0$.

b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de la fonction $x \mapsto (1-x^2)f'(x)$ est la fonction $x \mapsto (1-x^2)f^{(n+1)}(x) - 2nxf^{(n)}(x) - n(n-1)f^{(n-1)}(x)$.

Calculez de même la dérivée n-ème de la fonction $x \mapsto xf(x)$ en fonction des dérivées de f.

c) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P'_n = n^2 P_{n-1}$.

Question 6) Déterminez $P_n(0)$ en fonction de n.

Question 7) Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les racines de P_n sont simples.

Problème 2

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : xy' + ay + xy^2 = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question 1) En supposant qu'on connaisse une solution particulière f de cette équation, on pose alors $y = f + \dfrac{1}{z}$ où z est une fonction inconnue. Montrez que z est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En général, on arrive à résoudre ce genre d'équations si elles ne sont pas trop compliquées...

Dans toute la suite, on cherche une condition sur a pour que l'équation (E) possède une solution particulière f, fonction rationnelle, qu'on souhaite alors calculer.

On suppose donc que l'équation (E) possède une telle solution f. Elle est associée à une fraction rationnelle F écrite sous forme irréductible $F = \dfrac{A}{B}$ où A, B sont deux polynômes premiers entre eux.

Question 2)

a) Montrez que X divise un et un seul des deux polynômes A ou B.

b) Montrez que A et B ont le même degré au moins égal à 1, qu'on note n, et que le coefficient dominant de A vaut 1 ou -1 : on le note ε.

On étudie d'abord le cas où X divise B.

Question 3)

a) Montrez que A divise $B - A'$, déduisez-en que $B - A' = \varepsilon A$.

b) Montrez que $X.(A - B') + aB = \varepsilon XB$ et $X.(2\varepsilon A' + A'') = a(\varepsilon A + A')$.

c) Montrez que $a = 2n$.

On en sait assez pour résoudre le problème dans le cas où a est un entier naturel non nul et pair : $a = 2n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Question 4)

a) On note $A = \varepsilon \left(X^n + \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} a_p X^p \right)$. Montrez en calculant les coefficients de A qu'il est possible de trouver A vérifiant $X.(2\varepsilon A' + A'') = a(\varepsilon A + A')$.

b) On pose alors $B = A' + \varepsilon A$. Montrez que X divise B et ne divise pas A.

c) Montrez que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $XA^{(k)} = 2\varepsilon(n - k + 2)A^{(k-2)} + (2n - k + 2 - 2\varepsilon X)A^{(k-1)}$.

d) Soit D le p.g.c.d. de A et B. Montrez que D divise toutes les dérivées successives de A. Déduisez-en que A et B sont premiers entre eux.

On a donc bien montré que le problème posé a des solutions. Exemple : dans les cas où $a = 2$, $a = 4$, $a = 6$, donnez les fractions F qui conviennent.

Question 5) Pour finir, on étudie le cas où X divise A. En vous inspirant de ce qui précède, montrez que ce cas est impossible.