**POLYNÔMES**

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Déterminez deux polynômes $P, Q$ tels que $(X^2+1)P+(X^3+1)Q=1$.

***2)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez le degré de $(X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$.

****3)** Dans les question suivantes, il est conseillé de s'intéresser d'abord aux degrés des polynômes.

a) Déterminez les polynômes $P, Q$ tels que $P^2 = XQ^2$

b) Déterminez les polynômes $P$ et les nombres $\alpha$ tels que $P^2 = X.P(X-1)+\alpha$

c) Déterminez les polynômes $P$ tels que $P(X^2) = (X^2+1).P$

d) Déterminez les polynômes $P$ et les nombres $\alpha, \beta$ tels que $(P(X+1))^2 = X^2.P + \alpha X + \beta$

e) Déterminez les polynômes $P, Q$ tels que $P(Q) = P^2$ et $Q(P) = Q^2$ (très calculatoire !)

***4)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez les coefficients du polynôme $P = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)(1+X^8)\dots(1+X^{2^n})$.

****5)** Calculez de 2 façons le coefficient de degré $n$ de $(X+1)^{2n}$. Déduisez-en $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

***6)** Soit $U, V$ deux polynômes tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(x)\sin x + V(x)\cos x = 0$. Montrez que $U = V = 0$.

****7)** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $P(x) \in \mathbb{R}$. Montrez que $P \in \mathbb{R}[X]$.

****8)** Déterminez les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $x \in \mathbb{C}$, $P(x) \in \mathbb{R}$.

***9)** Soit $P$ un polynôme de degré 4 tel que $P(-1) = P(0) = P(1) = 1$ et $P(2) = P(3) = 9$.

a) Montrez qu'il existe deux constantes $a$ et $b$ telles que $P = 1 + (X^3 - X)(aX + b)$.

b) Déterminez $P$ sous forme développée.

***10)** Pour $n \in \mathbb{N}$, factorisez le polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left( \frac{(-1)^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X - i) \right)$.

****11)**

a) Déterminez le polynôme $P$ de plus bas degré tel que pour tout $x \in \{1, 2, 3\}$, $P(x) = x$ et $P(4) = 8$.

b) Généralisez : soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminez le polynôme $P$ de plus bas degré tel que pour tout $x \in \{1, \dots, n\}$, $P(x) = x$ et $P(n+1) = 2(n+1)$.

****12)** Soit $P$ un polynôme de degré 2020 tel que pour tout $k \in \{1, 2, ..., 2021\}$, $P(k) = \dfrac{1}{k}$. Calculez la valeur de $P(2022)$ (on pourra considérer le polynôme $Q = XP - 1$).

***13)** Soit $P = X^6 + 7X^5 + X^4 - 8X^3 + 17X^2 - 4X + 5$ et $a = 3 + \sqrt{5}$.

a) Déterminez un polynôme $A$ de degré 2 à coefficients entiers tel que $A(a) = 0$.

b) Effectuez la division euclidienne de $P$ par $A$ et déduisez-en la valeur de $P(a)$.

***14)** Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 4x + 7}{x^2 + 3x - 5}$. En effectuant une division euclidienne, montrez que la courbe de $f$ a une asymptote que vous préciserez en $+\infty$.

****15)**

a) Soit $P \in K[X]$, $(a, b) \in K^2$, $a \neq b$. Donnez le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$. Exemple : donnez le reste de la division euclidienne de $(X\sin\alpha + \cos\alpha)^n$ par $X^2 + 1$.

b) Faites de même dans le cas où $a = b$. Exemple : donnez le reste de la division euclidienne de $(X^2+1)^n$ par $(X-1)^2$.

c) Donnez le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $(X-1)^3$.

**16) Factorisez $6X^4+X^3+(6i+10)X^2+(2+i)X-(4+2i)$, sachant qu'il a au moins une racine réelle

**17) Soit $n\in\mathbb{N}$, montrez que $X^2+X$ divise $(X+1)^{2n+1}-X^{2n+1}-1$. En est-il de même pour $(X^2+X)^2$ ?

**18) Soit $(a,P)\in K\times K[X]$, $Q=\dfrac{1}{2}(X-a)(P'+P'(a))-P+P(a)$.

a) Montrez que $a$ est racine au moins triple de $Q$.

b) Exemple : on prend $P=X^6-1$ et $a=-1$ ; factorisez $Q$.

**19) Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$. $P$ a-t-il des racines multiples ?

**20) Déterminez le nombre $a$ tel que $P=(X+1)^3+(X-1)^3+a$ possède une racine double, puis factorisez $P$ dans $\mathbb{C}[X]$.

**21) Même exercice avec $P=a(X+1)^4-X$.

**22) Déterminez $a\in\mathbb{C}$ pour que le polynôme $P=(X+1)^5-X^5-a$ possède une racine réelle multiple, puis factorisez-le.

**23) Factorisez $P=X^4+8(1-i)X-12$, sachant que $P$ a une racine multiple.

**24)

a) Déterminez les racines du polynôme $X^4-2X^3-X^2-2X+1$ (on pourra poser $y=x+\dfrac{1}{x}$ pour résoudre l'équation $P(x)=0$), puis factorisez-le dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Même question avec $X^8+2X^6+3X^4+2X^2+1$.

c) Même question avec $X^6+2X^5-4X^4+8X^3-4X^2+2X+1$.

**25) Factorisez $X^9-4X^8+5X^7-7X^6+35X^5-91X^4+119X^3-85X^2+32X-5$.

**26) Factorisez les polynômes suivants dans $\mathbb{C}[X]$ (et dans $\mathbb{R}[X]$ si c'est possible) :

a) $X^3+(1+i)X^2-(4+7i)X$ b) $(X+1)^4-X^4-1$

c) $X^4-X^3-X+1$ d) $X^3-3X^2+5X-15$

e) $X^4+5X^3+11X^2+16X+12$ f) $X^5+2X^4+2X^3-X^2-2X-2$

g) $X^6-1$ h) $X^5-1$

i) $X^6+2X^4+2X^2+1$ j) $(X+1)^6-X^6$

k) $(X+1)^n-(X-1)^n$ l) Soit $a\in\mathbb{R}$, $P=X^{2n}-2\cos(na)X^n+1$

**27) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Factorisez $P(X)=1+X+X^2+...+X^n$ dans $\mathbb{C}[X]$. Déduisez-en $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n+1}$.

**28) Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $P=(X+1)^n-e^{2in\theta}\in\mathbb{C}[X]$.

Factorisez $P$. Déduisez-en $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)$ puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

**29) Déterminez les entiers $n\in\mathbb{N}$ tels que $(X^2+X+1)^2$ divise $(X+1)^n-X^n-1$.

**30) Soit $P=X^3-X-1$. Combien de racines réelles a le polynôme $P$ ? Montrez que ses racines sont simples, que ses racines réelles sont comprises entre 1 et $\dfrac{4}{3}$ et que ses racines non réelles sont de module compris entre $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et 1.

**31) Soit $P=X^4-\dfrac{1}{2}(X+1)$. Montrez que les racines de $P$ sont simples et qu'elles sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

****32)**

a) Montrez que les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$ sont les polynômes constants.

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(X+4).P(X) = X.P(X+1)$ : calculez $P(0)$, $P(-1)$, $P(-2)$ et $P(-3)$, factorisez $P$ puis déduisez-en $P$.

****33)** On cherche les polynômes $P \in K[X]$ tels que $P(0) = 1$, $P(1) = 1$, $P'(0) = 0$, $P'(1) = -1$.

a) Déterminez une solution particulière $P_0$ de degré 3.

b) Déduisez-en la forme générale des solutions : on pourra étudier les propriétés du polynôme $P - P_0$.

****34)** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$.

a) Soit $z = re^{i\theta}$ un complexe écrit sous forme trigonométrique ($r, \theta$ réels et $r > 0$). Montrez que si $|z+1|^2 \leqslant |z|$ et $|z-1|^2 \leqslant |z|$, alors $r^2 - r + 1 \leqslant 0$.

b) Montrez que si $P$ a une racine $a$, alors $P$ a aussi une racine $b$ telle que $|b| > |a|$.

c) Déterminez $P$.

****35)** Déterminez un polynôme $P$ tel que $(X-1)^4$ divise $P+1$ et $(X+1)^4$ divise $P-1$.

****36)** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X).P(X-1)$ et $P \neq 0$.

a) Montrez que si $a$ est une racine de $P$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{2^n}$ est une racine de $P$. Déduisez-en que $a = 0$ ou $|a| = 1$.

b) Montrez que si $a$ est racine de $P$, alors $a = -1$ ou $|a+1| = 1$.

c) Déterminez les racines de $P$.

d) Déterminez $P$.

****37)** Déterminez les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = -P(X).P(X+1)$ (on pourra s'inspirer de l'exercice précédent).

****38)** Déterminez les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'$ divise $P$ (on pourra s'intéresser à l'ordre de multiplicité des racines de $P$ et $P'$).

****39)** Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ tel que $X^4 - X + a$ et $X^2 - aX + 1$ aient une racine commune.

*****40)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrez l'équivalence entre les propositions :

▷ $\forall x \in \mathbb{R},\ P(\sin x) + P(\cos x) = 1$

▷ $\exists U \in \mathbb{R}[X] \quad P = \left(X^2 - \frac{1}{2}\right) U\left(\left(X^2 - \frac{1}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{2}$.

****41)** Formule de Taylor inversé.

Montrez que si $a \in K$, $P \in K[X]$ et $\deg P \leqslant n$, alors $P(X+a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!} a^k$.

***42)** Soit $a, b, c$, les trois racines du polynôme $X^3 - iX + 1$. Calculez la somme $s = a^7 + b^7 + c^7$ (on pourra d'abord écrire la division euclidienne de $X^7$ par $X^3 - iX + 1$).

***43)** Soit $a, b, c$ les trois racines du polynôme $X^3 - X - 1$. Calculez $\dfrac{1+a}{1-a} + \dfrac{1+b}{1-b} + \dfrac{1+c}{1-c}$.

***44)** Soit $P = 2X^3 - 3X^2 - 32X - 15$. Déterminer les racines de $P$ sachant que deux d'entre elles ont pour somme 2.

***45)** Résolvez l'équation $(E)$ $x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$ sachant que la somme de deux de ses racines est égale à la troisième

****46)** Résolvez les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xyz = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 13 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 33 \end{cases}$

***47)** Soient $x, y, z \in (\mathbb{C}^*)^3$ tels que $x+y+z=0$ et $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$. Montrez que $|x|=|y|=|z|$.

****48)** Le polynôme $P = X^4 - 2X^2 + \lambda X + 3$ admet 4 racines ($\neq$ ou confondues dans $\mathbb{C}$).
Trouvez $\lambda \in \mathbb{C}$ et les racines de $P$ de façon à ce que le produit de deux d'entre elles soit égal à 1.

****49)** Dans chacun des polynômes suivants, $\lambda$ désigne un paramètre complexe et $z_1$, $z_2$,... sont les racines :

a) déterminez $\lambda$ pour que les racines de $X^3 - 5X + \lambda$ vérifient la condition $z_1 z_2 = z_1 + z_2$ et résolvez l'équation

b) même énoncé avec $X^4 - 8X^3 + \lambda X^2 - 8X - 3$, condition : $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$

c) même énoncé avec $X^4 - 3X^3 - 10X^2 - 12X + \lambda$, condition : $z_1 z_2 = z_3 z_4$

d) même énoncé avec $X^4 + X^2 + \lambda X + 1$, condition : $z_1^2 + z_2^2 = z_3 z_4$

***50)** Déterminez les pgcd des polynômes suivants :

a) $X^3 - X^2 - X - 2$ et $X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$

b) $X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $X^3 + X + 1$

c) $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$

d) $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $X^n - nX + n - 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

****51)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = X^n - 1$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$.

a) Déterminez le reste de la division euclidienne de $P_n$ par $P_m$ en fonction de celui de $n$ par $m$.

b) Montrez que $P_n \wedge P_m = P_{n \wedge m}$.

*****52)**

a) Soit $(A, B) \in K[X]^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $A \wedge B = 1 \iff (A^n + B^n) \wedge AB = 1$.

b) Soit $(A, B) \in K[X]^2$. On note $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ les $n$ racines $n$-èmes de $-1$.
Montrez que $A^n + B^n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (A + \omega_k B)$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Montrez que l'équation $A^n + B^n = AB$ d'inconnue $(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2$ n'a que des solutions constantes.

d) Résolvez l'équation $A^2 + B^2 = AB$ d'inconnue $(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2$.

****53)** Soit $P, Q$ deux polynômes premiers entre eux tels que $P^2 + Q^2$ possède une racine multiple $a$. Montrez que $a$ est racine de $P'^2 + Q'^2$.

****54)** Soit $(A, B) \in K[X]^2$ deux polynômes non constants et premiers entre eux. Montrez qu'il existe un unique couple $(U, V) \in K[X]^2$ tel que $AU + BV = 1$ et $\deg U < \deg B$, $\deg V < \deg A$.

****55)** On cherche les polynômes $P(X) = (X - a)(X - b) \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X)$ divise $P(X^3)$.

a) Déterminez les solutions telles que $a = b$.

b) Montrez que si $a \neq b$ et $a^3 \neq b^3$, il existe 6 polynômes dont 4 dans $\mathbb{R}[X]$.

c) Trouvez les polynômes $P$ si $a \neq b$ et $a^3 = b^3$ et déduisez-en que 13 polynômes en tout conviennent, dont 7 dans $\mathbb{R}[X]$.

****56)** Soit $P$ un polynôme tel que les restes de la division euclidienne de $P$ par $(X-1)$, $(X-2)$ et $(X-3)$ soient 3, 7 et 13 respectivement. Déterminez le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-1)(X-2)(X-3)$.

****57)** Soit $A_1, \dots, A_n$ $n$ polynômes premiers entre eux deux à deux. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $B_k = \displaystyle\prod_{i=0,\ i \neq k} A_i$.

Montrez que les polynômes $B_1, \dots, B_n$ sont premiers dans leur ensemble.