# Fonctions convexes

Dans tout le cours, $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

La section 1 de ce cours est hors-programme, elle n'est là que pour vous aider à mieux comprendre les idées qui suivent et à éclairer quelques notions vues dans les autres disciplines scientifiques.

## 1 Barycentres

### 1.1 Généralités

**Proposition 1.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_n$ $n$ points du plan ou de l'espace géométrique, $m_1, \dots, m_n$ $n$ réels. Si $\sum_{k=1}^{n} m_k \neq 0$, alors il existe un unique point $G$ tel que $\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0}$.*

**Définition.** Ce point est appelé barycentre du système de points pondérés $(A_i, m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Il est souvent noté $G = \text{bary}(A_i, m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Les coefficients $m_i$ sont souvent appelés masses. Dans le cas où les coefficients $m_i$ sont tous égaux (et non nuls), on parle alors d'isobarycentre.

***Exemples.***

- L'isobarycentre de deux points est leur milieu.
- Tout point situé à l'intérieur d'un triangle est barycentre des trois sommets pondérés par des masses positifs.

**Proposition 2.** *Soit $(A_i, m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système de points pondérés de masse totale $\mu$ non nulle (i.e. $\mu = \sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$). On pose $G$ le barycentre de ce système.*

*Alors $G$ est le seul point tel que pour tout point $M$, $\mu\,\overrightarrow{GM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{A_iM}$.*

### 1.2 Propriétés

#### a) Homogénéité du barycentre

**Proposition 3.** *Soit $(A_i, m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système de points pondérés de masse totale $\mu$ non nulle. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\text{bary}(A_i, m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \text{bary}(A_i, \lambda m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.*

Par conséquent, ce résultat prouve qu'on peut fixer *a priori* la valeur de la masse totale, ce qui compte n'étant pas les masses eux-mêmes mais leurs rapports à la masse totale. Souvent, on choisit de fixer la masse à 1.

#### b) Associativité du barycentre

**Proposition 4.** *Soit $(A_i, m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système de points pondérés de masse totale $\mu$ non nulle. Alors pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, si $\mu_1 = \sum_{i=1}^{p} m_i \neq 0$ et $\mu_2 = \sum_{i=p+1}^{n} m_i \neq 0$, alors en notant $B_1 = \text{bary}(A_i, m_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $B_2 = \text{bary}(A_i, m_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant n}$,*

$$\text{bary}(A_i, m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \text{bary}\big((B_1, \mu_1), (B_2, \mu_2)\big)$$

Avec les mêmes notations, si $\mu' = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \neq 0$ et $m_n \neq 0$, alors en notant $A' = \text{bary}(A_i, m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$,

$$\text{bary}(A_i, m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \text{bary}\big((A', \mu'), (A_n, m_n)\big)$$

# 2 Parties convexes

**Définition.** Soit $E$ une partie du plan ou de l'espace géométrique.
On dit que $E$ est une partie convexe quand $\forall (M,N) \in E^2 \quad [MN] \subset E$.

**Proposition 5.** *Une partie $E$ du plan ou de l'espace géométrique est convexe si et s.si elle est stable par barycentration à masses positives,* i.e.

*pour tout système $(A_i, m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points de $E$, pondérés par des masses $m_i \geqslant 0$ telles que $\sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$, le barycentre $\mathrm{bary}(A_i, m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ appartient aussi à $E$.*

# 3 Fonctions convexes

## 3.1 Définition

**Définition.** Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle $I$.
On dit que $f$ est convexe sur $I$ quand son épigraphe $E$, ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y \geqslant f(x)$, est une partie convexe du plan.
On dit que $f$ est concave quand $-f$ est convexe.

***Exemples.***
- Les fonctions affines sont convexes.
- La fonction carrée est convexe.
- La fonction inverse est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et concave sur $\mathbb{R}_-^*$.

## 3.2 Caractérisation par inégalité de convexité

La proposition suivante est une simple ré-écriture de la définition.

**Proposition 6.** *Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle $I$.*
*Alors $f$ est convexe sur $I$ si et s.si* $\forall (x,y) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.
*Donc $f$ est concave sur $I$ si et s.si* $\forall (x,y) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

Cette inégalité est souvent traduite par la phrase suivante : une fonction est convexe quand tout sous-arc de sa courbe est situé sous sa corde.

Plus généralement, on montre le résultat suivant, appelée inégalité de convexité :

**Proposition 7.** *Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle $I$.*
*Alors $f$ est convexe sur $I$ si et s.si*

*pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$,*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

## 3.3 Caractérisation par croissance des pentes

**Proposition 8.** *Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle $I$.*
*Alors $f$ est convexe sur $I$ si et s.si pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I - \{a\}$.*

### 3.4 Fonctions convexes dérivables

**Proposition 9.** *Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie et dérivable sur un intervalle $I$.*
*Alors $f$ est convexe sur $I$ si et s.si $f'$ est croissante sur $I$.*

En fait, les hypothèses peuvent être affaiblies : il suffit que $f$ soit continue sur $I$ et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ pour que l'équivalence reste vraie.

En pratique, on utilise souvent la proposition suivante.

**Proposition 10.** *Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie et 2 fois dérivable sur un intervalle $I$.*
*Alors $f$ est convexe sur $I$ si et s.si $f''$ est positive sur $I$.*

Une dernière propriété bien pratique pour justifier des inégalités classiques.

**Proposition 11.** *Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie et dérivable sur un intervalle $I$.*
*Si $f$ est convexe sur $I$, alors la courbe de $f$ sur $I$ est située au-dessus de ses tangentes :*
*pour tout $c \in I$, $f(x) \geqslant f(c) + f'(c)(x-c)$*

***Exemples.***

— pour tout $x \in ]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$
  ou ce qui revient au même, pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$