L'usage des calculatrices est interdit

Ce sujet est sans doute **trop long** pour être traité dans sa totalité. Alors n'essayez pas de tout faire, en revanche visez **l'excellence de vos réponses**. Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et repérez les questions qui vous semblent faciles ou presque pour vous. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour faire les suivantes en l'indiquant sur votre copie par égard pour le correcteur. En fin d'épreuve, les questions que vous aviez repérées comme faciles devraient avoir été traitées, sauf si elles n'étaient pas si faciles finalement.

Écrivez lisiblement, soignez la présentation, efforcez-vous de faciliter la vie du correcteur. **Il est hors de question d'obliger le correcteur à refaire votre raisonnement ou vos calculs** : votre rédaction doit comporter suffisamment de détails pour que le correcteur lise sans trop réfléchir.

Exercice

Résolvez l'équation suivante d'inconnue z complexe, en donnant ses racines sous forme algébrique :

$$z^2 - (9+2i)z + 17 + 19i = 0$$

Indication : $1681 = (41)^2$

Problème 1 - Construction géométrique des images des racines d'une équation

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on appelle (E) l'équation $z^2 - 2e^{i\theta}z - 1 = 0$ d'inconnue z complexe. Cette équation a deux solutions éventuellement confondues z_1 et z_2.

On note M_1, M_2, P, A, B, C les points d'affixes respectives z_1, z_2, $e^{i\theta}$, 1, -1, i dans un repère orthonormé direct du plan. On suppose que les points P, A, B et C sont connus et déjà placés sur la figure : l'objectif est de construire les points M_1 et M_2 à partir de ces trois points à l'aide d'une règle et d'un compas.

Question 1) Soit α un réel. Donnez une expression factorisée de $e^{i\alpha} + 1$ et de $e^{i\alpha} - 1$.

Question 2) Que vaut la somme des racines de l'équation ? Justifiez que P est le milieu de $[M_1M_2]$.

Question 3) Écrivez le discriminant Δ de l'équation sous forme trigonométrique, vérifiez que son module est $8\cos\theta$ et précisez un argument.

Question 4) Justifiez que les racines z_1 et z_2 sont $e^{i\theta} + \sqrt{2\cos\theta}e^{i\theta/2}$ et $e^{i\theta} - \sqrt{2\cos\theta}e^{i\theta/2}$.

Question 5)

a) Montrez que $2\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{2\cos\theta}$ et $2\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{2\cos\theta}$ sont deux réels positifs.

b) Exprimez $z_1 + 1$ et $z_2 + 1$ sous forme trigonométrique à l'aide des deux expressions précédentes.

c) Vérifiez que $z_1 + 1$, $z_2 + 1$, $e^{i\theta} + 1$ ont tous pour argument $\frac{\theta}{2}$ modulo 2π.
De quels vecteurs ces trois nombres sont-ils les affixes ? Que pouvez-vous en déduire à propos des points M_1, M_2, P et B ?

Question 6)

a) Exprimez $z_1 - 1$ et $z_2 - 1$ en factorisant par $e^{i\theta/2}$.

b) Montrez que $z_1 - 1$ et $z_2 - 1$ ont pour module $\sqrt{2}$.

c) Déduisez-en que M_1, M_2 et C sont sur un même cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.

Question 7) Expliquez comment à partir du point P on peut construire graphiquement les points M_1 et M_2 sans résoudre l'équation (E). Faîtes une figure dans le cas $\theta = \frac{\pi}{3}$ qui illustre votre explication.

Problème 2 - La célèbre suite de Fibonacci

On définit la suite u par récurrence : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Partie 1 - Propriétés immédiates

Question 1) Dans toute la suite du problème, vous aurez besoin des premières valeurs de la suite u. Sans les noter toutes sur la copie, calculez u_n pour $n \in [\![0, 15]\!]$. Parmi ces 16 valeurs, pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n = n$? u_n est un multiple de 5 ? u_n est le carré d'un entier ?

Question 2)

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier naturel compris entre $n-1$ et 2^n.

b) Donnez une valeur d'un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 2n$, en justifiant bien sûr.

c) Donnez une valeur d'un entier n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant n^2$.

Question 3) Trouvez et démontrez une expression simple pour $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$.

Question 4) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1})$ et $u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2$.

Partie 2 - Quelques sommes remarquables

Question 1)

a) Vérifiez que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{u_k u_{k+2}} = \dfrac{1}{u_k u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_{k+1}u_{k+2}}$.

b) Déduisez-en une expression simple de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+2}}$ en fonction de u_{n+1} et u_{n+2}.

Question 2) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ est téléscopique et déduisez-en sa valeur.

Question 3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, u_k$. En exprimant $(k+2)u_{k+2} - (k+1)u_{k+1}$ en fonction de u_{k+1} et u_k, montrez que $(n+2)u_{n+2} - u_1 = S_n + s_{n+1} + 2s_n$. Déduisez-en une expression de S_n en fonction de termes de la suite u.

Question 4) Calculez la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2$ en fonction de termes de la suite u.

Partie 3 - Décomposition en base fibonaccienne

Soit m un entier au moins égal à 2 et $(a_m, \ldots, a_2)$ une suite finie de nombres valant 0 ou 1 commençant par un 1. On note alors $[a_m a_{m-1} \ldots a_2]$ le nombre $\displaystyle\sum_{k=2}^{m} a_k u_k$.

Par exemple,

- quand $m = 2$, la seule suite possible est $(a_2) = (1)$, donc $[1] = u_2 = 1$
- si $m = 3$, il y a deux suites possibles : $(a_3, a_2) = (1, 0)$ et dans ce cas $[10] = 1 \times u_3 + 0 \times u_2 = u_3 = 2$; $(a_3, a_2) = (1, 1)$ et dans ce cas $[11] = 1 \times u_3 + 1 \times u_2 = u_3 + u_2 = 3$
- avec $m = 4$ et $(a_4, a_3, a_2) = (1, 1, 0)$, on a $[110] = 1 \times u_4 + 1 \times u_3 + 0 \times u_2 = u_4 + u_3 = 5$
- avec $m = 7$, on a par exemple $[100101] = u_7 + u_4 + u_2 = 17$

On dit qu'une écriture d'un entier n sous la forme $n = [a_m a_{m-1} \ldots a_2]$ est propre (on dit alors qu'elle est de longueur $m-1$) quand dans la liste des 0 et des 1, il n'y a pas deux 1 consécutifs. Par exemple, $[100101]$ est une écriture propre de 17, alors que $[11101]$ ne l'est pas.

Par convention, on pose $[\,] = 0$ et on dit que c'est l'écriture propre de 0. L'objectif est de démontrer que tout entier naturel non nul a une unique écriture propre.

Question 1) D'abord, quelques exemples.

a) Donnez l'écriture propre de 16, de 28 et de 33.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant 2$, donnez l'écriture propre de u_p.

Question 2) Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $t_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_{2k}$ et $t'_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_{2k+1}$: ce sont les deux écritures propres de longueur donnée qui contiennent le plus de 1 possible.

a) Montrez que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $t_p = u_{2p+1} - 1$.

b) Donnez de même la valeur de t'_p en fonction de la suite u.

Question 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n a une écriture propre de longueur $m-1$: $n = [1a_{m-1} \dots a_2]$.

Justifiez que $u_m \leqslant n$. Que vaut a_{m-1} ? Justifiez alors que le nombre $[a_{m-2} \dots a_2]$ est presque écrit de façon propre : que suffit-il de faire pour obtenir son écriture propre ?

Question 4) Montrez par récurrence forte que pour tout $m \geqslant 2$, si n est un entier possédant une écriture propre de longueur $m-1$, alors $u_m \leqslant n < u_{m+1}$.

Question 5) Soit n un entier naturel non nul. On pose $F_n = \{k \in \mathbb{N} \ / \ k \geqslant 2 \text{ et } u_k \leqslant n\}$.

a) Justifiez que F_n possède un maximum m et que $u_m \leqslant n < u_{m+1}$.

b) Montrez que si on sait que $n - u_m$ a une écriture propre $[a_p a_{p-1} \dots a_2]$ (éventuellement $n - u_m = [\,]$), alors $p \leqslant m-2$ puis que n possède lui aussi une écriture propre.

Question 6) Montrez par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n a une écriture propre.

On a ainsi démontré l'existence d'une écriture propre. Il reste à prouver l'unicité.

Question 7) Deux écritures propres de longueur différentes peuvent-elles être égales ?

Question 8) Montrez l'unicité de l'écriture propre d'un entier.

Question 9)

a) Soit $p \geqslant 4$. Quelle est l'écriture propre de $2u_p$?

b) Quelle est l'écriture propre de $3u_p$?

Devoir surveillé 2 - Corrigé

Exercice

Le discriminant de l'équation vaut $\Delta = (9+2i)^2 - 4(17+19i) = 9-40i$

Soit $\delta = x+iy$ (x, y réels) une racine carrée de Δ. Alors $\begin{cases} x^2-y^2 &= 9 \\ 2xy &= -40 \\ x^2+y^2 &= \sqrt{9^2+40^2} = 41 \end{cases}$, donc $x^2 = 25$, $y^2 = 16$ et x, y de signes contraires : on peut choisir $\delta = 5-4i$.

Donc les racines de l'équation sont $\dfrac{9+2i+5-4i}{2} = 7-i$ et $\dfrac{9+2i-5+4i}{2} = 2+3i$.

Problème 1

Question 1) $e^{i\alpha}+1 = \left(e^{i\alpha/2}+e^{-i\alpha/2}\right)e^{i\alpha/2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\alpha/2}$.

$e^{i\alpha}-1 = \left(e^{i\alpha/2}-e^{-i\alpha/2}\right)e^{i\alpha/2} = 2i\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\alpha/2}$.

Question 2) On sait que la somme des racines de l'équation $az^2+bz+c=0$ est $-\dfrac{b}{a}$: ici, on obtient donc $z_1+z_2 = 2e^{i\theta}$, donc $\dfrac{\mathrm{aff}(M_1)+\mathrm{aff}(M_2)}{2} = \mathrm{aff}(P)$, ce qui signifie que P est le milieu de $[M_1M_2]$.

Question 3) $\Delta = (-2e^{i\theta})^2 - 4\times(-1)z = 4(e^{2i\theta}+1) = 4e^{i\theta}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = 8e^{i\theta}\cos\theta$.

Comme $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\theta > 0$ donc l'écriture précédente est l'écriture trigonométrique de Δ, donc $|\Delta| = 8\cos\theta$ et $\arg\Delta \equiv \theta\ [2\pi]$.

Question 4) Une racine carrée de Δ est $\sqrt{8\cos\theta}e^{i\theta/2}$, donc les racines de l'équation (E) sont $z_1 = e^{i\theta}+\sqrt{2\cos\theta}e^{i\theta/2}$ et $z_2 = e^{i\theta}-\sqrt{2\cos\theta}e^{i\theta/2}$.

Question 5)

a) Pour le premier des deux nombres, c'est évident, puisqu'il est la somme de nombres positifs.
Pour le second, on procède par équivalences :
$2\cos\dfrac{\theta}{2} - \sqrt{2\cos\theta} \geqslant 0$ si et seulement si $2\cos\dfrac{\theta}{2} \geqslant \sqrt{2\cos\theta}$
comme les deux membres de l'inégalité sont deux réels positifs, elle est encore équivalente à
$\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2 \geqslant (\sqrt{2\cos\theta})^2$, c'est-à-dire à $4\cos^2\dfrac{\theta}{2} \geqslant 2\cos\theta$
or $\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$ donc on obtient l'équivalence :
$2\cos\dfrac{\theta}{2} - \sqrt{2\cos\theta} \geqslant 0$ si et seulement si $4\cos^2\dfrac{\theta}{2} \geqslant 2\left(2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1\right)$, ce qui revient à $0 \geqslant -2$
cette dernière inégalité est vraie, donc par équivalences successives, l'inégalité $2\cos\dfrac{\theta}{2} - \sqrt{2\cos\theta} \geqslant 0$ est vraie aussi.

b) $z_1+1 = e^{i\theta}+1+\sqrt{2\cos\theta}e^{i\theta/2} = \left(2\cos\dfrac{\theta}{2}+\sqrt{2\cos\theta}\right)e^{i\theta/2}$ et $z_2+1 = \left(2\cos\dfrac{\theta}{2}-\sqrt{2\cos\theta}\right)e^{i\theta/2}$: ces égalités sont bien des écritures trigonométriques, puisque les deux facteurs réels sont positifs.

c) D'après les écritures précédentes, les arguments des trois complexes sont tous congrus à $\dfrac{\theta}{2}$. Or ce sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{BM_2}$ et $\overrightarrow{BP}$. Donc ces 3 vecteurs sont colinéaires, autrement dit les 3 points M_1, M_2, P sont alignés avec B (et du même côté de B).

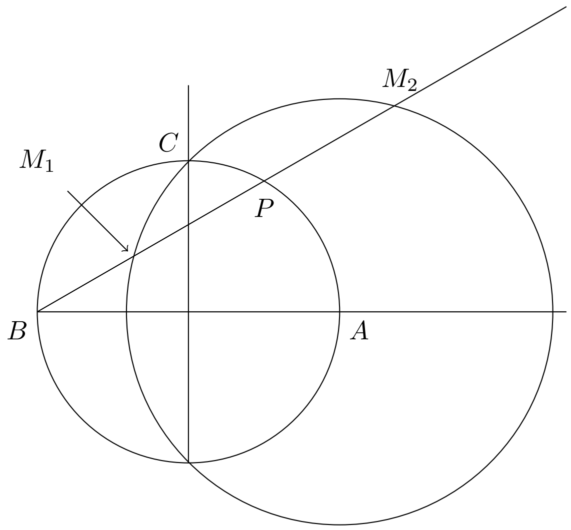
Question 6)

a) $z_1-1 = e^{i\theta}-1+\sqrt{2\cos\theta}e^{i\theta/2} = \left(\sqrt{2\cos\theta}+2i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$ et $z_2-1 = \left(\sqrt{2\cos\theta}-2i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}$.

b) $|z_1-1| = \left|\sqrt{2\cos\theta}+2i\sin\dfrac{\theta}{2}\right| \times \left|e^{i\theta/2}\right| = \sqrt{(\sqrt{2\cos\theta})^2+\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$
$= \sqrt{2\left(2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1\right)+4\sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}+4\sin^2\dfrac{\theta}{2}-2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$ et de même $|z_2-1| = \sqrt{2}$

c) $z_1 - 1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_1}$ donc $|z_1 - 1|$ est la distance AM_1 : d'après le résultat précédent, M_1 est sur le cercle de centre A de rayon $\sqrt{2}$. Et de même pour M_2. Ce cercle est le cercle de centre A passant par le point C.

Question 7) Le point P étant connu, les points M_1 et M_2 sont à la fois sur la droite (BP) et sur le cercle précédent. En construisant cette droite et ce cercle, on obtient les points M_1 et M_2 comme les points d'intersection.



Problème 2

Partie 1

Question 1) Les premières valeurs de la suite (u_n) : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610

Parmi les entiers n compris entre 0 et 15,
- 2 vérifient la condition $u_n = n$: 0 et 5 ;
- 4 vérifient la condition 5 divise u_n : $0, 5, 10, 15$;
- 4 vérifient la condition u_n est un carré : $0, 1, 2, 12$.

Question 2)

a) Par récurrence : on pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat « $n - 1 \leqslant u_n \leqslant 2^n$ ».
$\mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(3)$ sont vraies.
Pour tout $n \geqslant 2$, si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies, alors
par addition d'inégalités, on a $(n-1) + n \leqslant u_n + u_{n+1} \leqslant 2^n + 2^{n+1}$, *i.e.* $2n - 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant 3 \times 2^n$.
Comme $n \geqslant 2$, on a $n + 1 \leqslant 2n - 1$ et $3 \times 2^n \leqslant 4 \times 2^n = 2^{n+2}$, donc on obtient $n + 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant 2^{n+2}$, autrement dit $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence double, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Mais comme on a aussi $\mathscr{P}(0)$ et $P(1)$ vraies, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

b) Par récurrence : on pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat « $2n \leqslant u_n$ ».
$\mathscr{P}(8)$ et $\mathscr{P}(9)$ sont vraies, car $u_8 = 21$ et $u_9 = 34$.
Pour tout $n \geqslant 8$, si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies, alors
par addition d'inégalités, on a $2n + 2(n+1) \leqslant u_n + u_{n+1}$, *i.e.* $4n + 2 \leqslant u_{n+2}$.
Comme $n \geqslant 8$, on a $n \geqslant 1$ donc $2n + 4 \leqslant 4n + 2$, donc on obtient $2(n+2) \leqslant u_{n+2}$, autrement dit $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence double, pour tout $n \geqslant 8$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

c) Par récurrence : on pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat « $n^2 \leqslant u_n$ ».
$\mathscr{P}(12)$ et $\mathscr{P}(13)$ sont vraies, car $u_{12} = 144 = 12^2$ et $u_{13} = 233 \geqslant 169 = 13^2$.
Pour tout $n \geqslant 12$, si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies, alors
par addition d'inégalités, on a $n^2 + (n+1)^2 \leqslant u_n + u_{n+1}$, *i.e.* $2n^2 + 2n + 1 \leqslant u_{n+2}$.
Comme $n \geqslant 12$, on a $n \geqslant 3$ donc $n^2 + 4n + 4 \leqslant 2n^2 + 2n + 1$, donc on obtient $(n+2)^2 \leqslant u_{n+2}$, autrement dit $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence double, pour tout $n \geqslant 12$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Question 3) Par récurrence : on pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat « $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ ».

$\mathscr{P}(1)$ est vraie, car $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors

$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (u_n + u_{n+1})u_n - u_{n+1}(u_n + u_{n-1}) = u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = -\left(u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2\right) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$, autrement dit $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Question 4) Par récurrence : on pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat « $u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1})$ et $u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2$ ».

$\mathscr{P}(1)$ est vraie, car $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 2$.

Pour tout $n \geqslant 1$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors

d'une part, $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = u_{2n} + u_{2n+1} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) + u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_n u_{n-1} + u_n^2 + u_n u_{n+1} u_{n+1}^2$

$= u_n(u_n + u_{n-1}) + u_{n+1}(u_n + u_{n+1}) = u_n u_{n+1} + u_{n+1}u_{n+2} = u_{n+1}(u_n + u_{n+2})$

d'autre part, $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = u_n^2 + u_{n+1}^2 + u_{n+1}(u_n + u_{n+2}) = u_n(u_n + u_{n+1}) + u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_{n+2}$

$= u_n u_{n+2} + u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_{n+2}(u_n + u_{n+1}) = u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Partie 2

Question 1)

a) La suite u ne s'annule pas à partir du rang 1, donc les quotients suivants ont tous un sens.
Pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{u_k u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_{k+1}u_{k+2}} = \dfrac{u_{k+2} - u_k}{u_k uk + 1 u_{k+2}} = \dfrac{u_{k+1}}{u_k uk + 1 u_{k+2}} = \dfrac{1}{u_k u_{k+2}}$.

b) La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+2}}$ est donc télescopique :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_k u_{k+1}} - \frac{1}{u_{k+1}u_{k+2}}\right) = \frac{1}{u_1 u_2} - \frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}}$.

Question 2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+2} - u_{k+1}) = u_{n+2} - u_1 = u_{n+2} - 1$.

Question 3) $(k+2)u_{k+2} - (k+1)u_{k+1} = (k+1)(u_{k+2} - u_{k+1}) + u_{k+2} = (k+1)u_k + u_k + u_{k+1} = ku_k + 2u_k + u_{k+1}$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} [(k+2)u_{k+2} - (k+1)u_{k+1}] = \sum_{k=0}^{n} [ku_k + 2u_k + u_{k+1}] = \sum_{k=0}^{n} ku_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}$

donc (somme télescopique à gauche) on obtient : $(n+2)u_{n+2} - u_1 = S_n + 2s_n + \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} u_j = S_n + 2s_n + s_{n+1} - u_0$.

D'après la question précédente, on aboutit à : $S_n = (n+2)u_{n+2} - 1 - 2(u_{n+2} - 1) - (u_{n+3} - 1) = (n-1)u_{n+2} - u_{n+1} + 2$.

Question 4) On pose $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{k+1}^2 = \sum_{j=2}^{n+1} u_j^2 = c_{n+1} - u_1^2 = c_n + u_{n+1}^2 - 1$.

D'après la question 4 de la partie 1, on a montré : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_{2k+1} = u_k^2 + u_{k+1}^2$,

donc en additionnant ces égalités pour k variant de 1 à n, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{2k+1} = c_n + c_n + u_{n+1}^2 - 1 = 2c_n + u_{n+1}^2 - 1$.

Or la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{2k+1}$ est télescopique, car $u_{2k+1} = u_{2k+2} - u_{2k} = u_{2(k+1)} - u_{2k}$.

Donc il vient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{2k+1} = u_{2(n+1)} - u_2 = 2c_n + u_{n+1}^2 - 1$, puis $c_n = \dfrac{u_{2n+2} - u_{n+1}^2}{2}$.

Partie 3

Question 1)

a) $16 = 13 + 3 = [100100]$; $28 = 21 + 5 + 3 = [1001010]$; $33 = 21 + 8 + 3 + 1 = [1010101]$.

b) $u_p = 1 \times u_p + 0 \times u_{p-1} + ... + 0 \times u_2 = [100\dots0]$, avec $p-2$ zéros.

Question 2)

a) Je réponds aux deux questions suivantes en même temps.

La somme $t'p$ a été calculée dans la réponse à la question 4 de la partie 2 : $t'p = u_{2p+2} - 1$.

La somme t_p se déduit de plusieurs calculées précédemment : $t_p + t'_p = \sum_{k=2}^{2p+1} u_k = s_{2p+1} - u_0 - u_1 = u_{2p+3} - 2$, donc $t_p = u_{2p+3} - u_{2p+2} - 1 = u_{2p+1} - 1$.

b)

Question 3) Si $n = [1a_{m-1}\dots a_2]$, alors $n = u_m + \sum_{k=2}^{m-1} a_k u_k$. Or les nombres u_k et a_k sont positifs ou nuls, donc $n \geqslant u_m$.

Comme l'écriture est propre, a_{m-1} vaut 0 (aucune suite de deux 1 consécutifs). De même, dans la suite $(a_{m-1}, \dots, a_2)$, il n'y a aucune suite de deux 1 consécutifs : pour avoir une écriture propre, il suffit de supprimer les zéros à gauche de l'écriture.

Question 4) Par récurrence : on pose $\mathscr{P}(m)$ le prédicat « si n est un entier possédant une écriture propre de longueur $m-1$, alors $u_m \leqslant n < u_{m+1}$ ».

$\mathscr{P}(2)$ est vraie, car alors le seul entier possédant une écriture propre de longueur 1 est $n = 1 = [1]$ et on a bien $u_2 = 1 \leqslant n = 1 < u_3 = 2$.

Pour tout $m \geqslant 3$, si $\mathscr{P}(2), \mathscr{P}(3), \dots, \mathscr{P}(m-1)$ sont vraies, alors

soit n un entier ayant une écriture propre de longueur $m-1$ $[a_m a_{m-1}\dots a_2]$, alors d'après la question précédente, $u_m \leqslant n$; on pose alors $n' = [a_{m-1}\dots a_2]$: c'est un entier tel que $n = u_m + n'$ dont une écriture propre s'obtient en supprimant les zéros de gauche, or $a_{m-1} = 0$, donc $n' = [a_{m-2}\dots a_2]$ a une écriture propre ayant une longueur $p-1$ tel que $p-1 \leqslant m-3$ (donc $p \leqslant m-2$).

Si $p = 1$, alors $n' = [\,] = 0$, alors $u_m = n < u_{m+1}$ (la suite de Fibonacci est clairement strictement croissante à partir du rang 2),

sinon $p \geqslant 2$, donc par hypothèse de récurrence, on a $u_p \leqslant n' < u_{p+1}$, et $p+1 \leqslant m-1$ donc $n = u_m + n' < u_m + u_{p+1} \leqslant u_m + u_{m-1} = u_{m+1}$.

Donc $\mathscr{P}(m)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence forte, pour tout $m \geqslant 2$, $\mathscr{P}(m)$ est vraie.

Question 5)

a) $n \geqslant 1 = u_2$ donc F contient 2.

De plus, la suite de Fibonacci est strictement croissante et diverge vers $+\infty$ (par comparaison avec la suite $(n-1)$ par exemple, voir partie 1). Donc à partir d'un certain rang k_0, on a $u_k > n$.

Autrement dit, l'ensemble F est majoré par k_0.

F est un ensemble d'entiers non vide et majoré, donc F possède un maximum m : m est dans F donc $u_m \leqslant n$ et $m+1$ n'est pas dans F donc $n < u_{m+1}$.

b) $u_m \leqslant n < u_{m+1}$ donc $0 \leqslant n - u_m < u_{m+1} - u_m = u_{m-1}$.

Si on connaît une écriture propre de $n - u_m$ notée $[a_p a_{p-1}\dots a_2]$, alors $u_p \leqslant n - u_m < u_{p+1}$, donc $u_p \leqslant n - u_m < u_{m-1}$.

Comme $u_p < u_{m-1}$ et la suite u est strictement croissante (à partir du rang 2), on en déduit $p < m-1$, autrement dit $p \leqslant m-2$.

Donc $n = u_m + \sum_{k=2}^{p} a_k u_k = [10\dots a_p \dots a_2]$: n possède une écriture propre.

Question 6) Par récurrence forte : on pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat « n possède une écriture propre ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie, car $0 = [\,]$. $\mathscr{P}(1)$ est vraie, car $1 = [1]$.

Pour tout $n \geqslant 1$, si $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1), \dots, \mathscr{P}(n-1)$ sont vraies, alors

d'après la question précédente, on peut fixer un entier $m \geqslant 2$ tel que $u_m \leqslant n < u_{m+1}$, puis on pose $n' = n - u_m$: $n' \in [\![0, n-1]\!]$ donc $\mathscr{P}(n')$ est vraie par hypothèse de récurrence. Donc n' possède une écriture propre.

Mais alors, la question précécente montre que n en possède une aussi.

Donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Question 7) On a montré dans la question 4 que si n possède deux écritures propres de longueurs $m-1$ et $p-1$, alors $u_m \leqslant n < u_{m+1}$ et $u_p \leqslant n < u_{p+1}$.

Donc en particulier, $u_m < u_{p+1}$ et par stricte croissance de la suite u, $m < p+1$ donc $m \leqslant p$. Mais on a aussi $u_p < u_{m+1}$ donc $p \leqslant m$. Finalement $p = m$.

Deux écritures propres de longueurs différentes ne peuvent donc être égales.

Question 8) Par récurrence forte : on pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat « n possède une unique écriture propre ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie, car $0 = [\,]$. $\mathscr{P}(1)$ est vraie, car $1 = [1]$.

Pour tout $n \geqslant 1$, si $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1), \ldots, \mathscr{P}(n-1)$ sont vraies, alors

d'après la question précédente, la longueur de toute écriture propre de n est fixée : c'est $m-1$ où m est l'unique entier $m \geqslant 2$ tel que $u_m \leqslant n < u_{m+1}$. Toute écriture propre de n est de la forme $[10a_{m-2}\ldots a_2]$ de longueur $m-1$.

Le nombre $n' = [a_{m-2}\ldots a_2]$ est strictement inférieur à n donc par hypothèse de récurrence, il a une unique écriture propre, qui est celle-ci, aux zéros de gauche près. Donc les chiffres de l'écriture propre de n sont uniques.

Donc $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Question 9)

a) Soit $p \geqslant 4$.
$2u_p = u_p + u_p = u_{p+1} - u_{p-1} + u_{p-1} + u_{p-2} = u_{p+1} - u_{p-2} = [10010\ldots0]$ avec $p-4$ zéros à droite.
Exemples : $2u_4 = 6 = 5 + 1 = u_5 + u_2 = [1001]$; $2u_6 = 16 = 13 + 3 = u_7 + u_4 = [100100]$.

b) Soit $p \geqslant 4$.
$3u_p = u_p + u_p + u_p = u_p + u_p + u_{p-1} + u_{p-2} = u_p + u_{p+1} + u_{p-2} = u_{p+2} - u_{p-2} = [100010\ldots0]$ avec $p-4$ zéros à droite.
Exemples : $3u_4 = 9 = 8 + 1 = u_6 + u_2 = [10001]$; $3u_6 = 24 = 21 + 3 = u_8 + u_4 = [1000100]$.