Problème 1

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Question 1) On fixe un réel $x \in]0,1]$. On pose $g_x : t \mapsto f(t) - tf'(0) - t^2 A$ où A est une constante à choisir.

a) Montrez qu'on peut choisir A telle que $g_x(x) = 0$. On fait désormais ce choix.

b) Montrez en utilisant deux fois le th. de Rolle qu'il existe $c_x \in]0,x[$ tel que $g_x''(c_x) = 0$.

c) Vérifiez qu'alors on a : $f(x) = xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(c_x)$.

Question 2)

a) Justifiez l'existence d'un majorant M de la fonction $|f''|$ sur $[0,1]$.

b) Montrez que pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x) - xf'(0)| \leqslant M\frac{x^2}{2}$.

Question 3)

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| u_n - f'(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \right| \leqslant \frac{M}{2n}$.

b) Concluez : quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Question 4) Application : déterminez la limite de $\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Problème 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires I si et seulement si étant données deux valeurs quelconques de f sur I, tout nombre intermédiaire est aussi valeur de f sur I.

L'objectif du problème est de démontrer le théorème de Darboux : la dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle I vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur I.

Question 1)

a) Donnez une condition suffisante sur f pour qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

b) Montrez que cette condition n'est pas nécessaire.

Question 2) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que f' ne s'annule pas sur I.

a) Montrez que f est injective.

b) Justifiez que f est strictement monotone sur I.

c) Montrez que f' est de signe constant sur I.

Question 3) Montrez le théorème de Darboux cité en préambule du problème.

Exercice

Dans cet exercice, il vous faut utiliser la définition de la limite avec ε. Il n'est donc pas évident. Ne passez du temps sur cet exercice que si vous avez bien avancé sur les problèmes précédents, sinon concentrez-vous sur eux.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Montrez que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Généralisez : montrez que si $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

Problème 1

Question 1)

a) $A = \dfrac{f(x) - xf'(0)}{x^2}$

b) g_x est de classe C^2 sur $[0,1]$ d'après les th. d'opérations sur les fonctions de classe C^2, donc on a g_x continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$. De plus, $g_x(0) = g_x(x) = 0$ donc il existe $d \in]0,x[$ tel que $g_x'(d) = 0$ (th. de Rolle).
g_x' est elle-même de classe C^1 sur $[0,1]$ donc continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$. De plus, $g_x'(0) = 0$ et $g_x'(d) = 0$ donc il existe $c \in]0,d[\subset]0,x[$ tel que $g_x''(c) = 0$ (th. de Rolle encore).

c) Simple vérification car $g_x''(c_x) = f''(c_x) - 2A = 0$.

Question 2)

a) f est de classe C^2 sur $[0,1]$ donc f'' est une fonction continue sur le segment $[0,1]$: elle est donc bornée, donc M existe.

b) D'après la question 1, on a $f(x) - xf'(0) = \dfrac{x^2}{2} f''(c)$, donc $|f(x) - xf'(0)| = \dfrac{x^2}{2}|f''(c)| \leqslant \dfrac{x^2}{2} M$.

Question 3)

a) On applique le résultat de la question 2 en posant $x = \dfrac{k}{n^2}$, qui appartient bien à $]0,1]$. On a donc $\left| f\left(\dfrac{k}{n^2}\right) - \dfrac{k}{n^2} f'(0) \right| \leqslant \dfrac{k^2}{2n^4} M$.
D'après l'inégalité triangulaire, $\left| u_n - f'(0) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{n^2} \right| = \left| \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right) - \dfrac{k}{n^2} f'(0) \right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\dfrac{k}{n^2}\right) - \dfrac{k}{n^2} f'(0) \right|$
$\leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k^2}{2n^4} M = \dfrac{M}{2n^4} \sum_{k=0}^{n} k^2 \leqslant \dfrac{M}{2n^4} n^3 = \dfrac{M}{2n}$.

b) D'après le th. d'encadrement, $u_n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{n^2} f'(0)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{n^2} f'(0) = \dfrac{f'(0)}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{f'(0)}{n^2} \times \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{f'(0)(n+1)}{2n}$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{n^2} f'(0)$ tend vers $\dfrac{f'(0)}{2}$, donc d'après les th. d'opérations sur les limites, u_n tend vers $\dfrac{f'(0)}{2}$.

Question 4) En notant $a_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$, on a $\ln a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$. Or la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ vérifie les conditions du problème, donc $\ln a_n$ tend vers $\dfrac{f'(0)}{2} = \dfrac{1}{2}$, donc comme exp est continue, on en déduit que a_n tend vers $e^{1/2} = \sqrt{e}$ (th. composition des limites).

Problème 2

Question 1)

a) D'aprés le théorème des valeurs intermédiaires, toute fonction continue sur un intervalle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

b) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x$ si $x < 0$ et $f(x) = (x-1)^2$ si $x \geqslant 0$.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, si $y < 0$ alors $f(y) = y$ et si $y \geqslant 0$, alors $f(\sqrt{y}+1) = y$, donc dans les deux cas, y a un antécédent par f. L'application f est donc surjective, tout réel est une valeur de f sur $\mathbb{R}$ donc f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Pourtant, f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Question 2)

a) Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x \neq y$. f est dérivable sur I et $[x,y] \subset I$ donc f est dérivable sur $[x,y]$. En particulier f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$. D'après le th. des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Comme $f'(c) \neq 0$, on a donc $f(x) \neq f(y)$. Ceci prouve que f est injective.

b) f est dérivable sur I donc continue sur I, et elle est injective, donc f est strictement monotone sur I d'après le cours.

c) Si f est strictement croissante sur I, alors soit $a \in \mathring{I}$ et $x \in \mathring{I}$, $x > a$, on a alors $f(x) > f(a)$ donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$; ce rapport a pour limite $f'(a)$ quand x tend vers a par valeurs supérieures, donc par passage à la limite, on obtient $f'(a) \geqslant 0$; comme f' ne s'annule pas sur I, on a donc $f'(a) > 0$. Ceci est vrai pour tout $a \in \mathring{I}$ et on peut faire de même aux bornes de I en se plaçant du bon côté bien sûr. Donc f' est strictement positive sur I.
On fait de même si f est strictement décroissante sur I pour montrer que $f' < 0$ sur I.

Question 3) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et c, d deux valeurs de f' sur I. Il existe donc $(a,b) \in I^2$ tel que $f'(a) = c$ et $f'(b) = d$.

Soit $\lambda \in]c,d[$, on pose $g : x \mapsto f(x) - \lambda x$. D'après les th. d'opérations sur les fonctions dérivables, g est dérivable sur I et $g' : x \mapsto f'(x) - \lambda$. Pour montrer que f' prend la valeur λ, on montre donc que g' s'annule.

Par l'absurde, si g' ne s'annule pas sur I, alors d'après la question précédente, g' est de signe constant sur I. Or $g'(a) = f'(a) - \lambda = c - \lambda$ et $g'(b) = d - \lambda$ sont de signes contraires puisque λ est entre c et d : contradiction. Donc f' prend la valeur λ sur I.

En ce sens, une dérivée f' est « presque » une fonction continue. Et la ressemblance ne s'arrête pas là : on peut démontrer que l'ensemble des points où f' est continue est une partie dense dans I.

Exercice

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $|f'(x)| \leqslant \varepsilon$.

Soit $x > A$. Sur le segment $[A,x]$, f est continue et dérivable, donc on peut appliquer le th. des accroissements finis : il existe $c \in]A,x[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(A)}{x-A} = f'(c)$, et comme $c > A$, on a $|f'(c)| \leqslant \varepsilon$,

donc $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x)-f(A)}{x} + \dfrac{f(A)}{x} = \dfrac{f(x)-f(A)}{x-A} \times \dfrac{x-A}{x} + \dfrac{f(A)}{x} = f'(c)\dfrac{x-A}{x} + \dfrac{f(A)}{x}$

donc $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|f'(c)\dfrac{x-A}{x}\right| + \left|\dfrac{f(A)}{x}\right| = |f'(c)|\,\dfrac{x-A}{x} + \left|\dfrac{f(A)}{x}\right|$ par inégalité triangulaire

or $0 \leqslant \dfrac{x-A}{x} \leqslant 1$ donc il vient $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant |f'(c)| + \dfrac{|f(A)|}{x} \leqslant \varepsilon + \dfrac{|f(A)|}{x}$

Mais quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{|f(A)|}{x}$ tend vers 0, donc il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \geqslant B$, $\dfrac{|f(A)|}{x} \leqslant \varepsilon$

donc finalement, pour tout $x > \max(A,B)$, on a $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

Résumons : on a montré $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall x > C \quad \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant 2\varepsilon$

Par définition, ceci signifie que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Maintenant on généralise : si $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors on pose $g : x \mapsto f(x) - \ell x$. Alors $g'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc d'après ce qui précède, $\dfrac{g(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, autrement dit $\dfrac{f(x)}{x} - \ell \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ ou encore $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.