Problème 1 - Une équation fonctionnelle

On cherche les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, telles que

1) f continue en 0
2) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1 - f(x)f(y)) . f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Soit f une telle fonction.

Partie 1 - Propriétés de f

Question 1)

a) Montrez que $f(0) = 0$.

b) Montrez que f est impaire.

Question 2) Montrez que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $1 - f(x)f(y) \neq 0$.

On peut donc transformer la condition 2) en $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$.

Question 3) On pose $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) = 0\}$. Montrez que pour tout $(x, p) \in A \times \mathbb{Z}$, $px \in A$.

Question 4) Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 - f ne s'annule qu'en 0.

Dans cette partie, on suppose que 0 est la seule racine de l'équation $f(x) = 0$.

Question 1) Montrez que f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

On constate simplement que $-f$ est aussi une solution du problème qui ne s'annule qu'en 0 : quitte à échanger les rôles de f et $-f$, on peut supposer que $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question 2) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, quel est le signe de $1 - f(x)^2$? Déduisez-en que f est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question 3) Montrez que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question 4) Montrez que f a une limite réelle en $+\infty$, puis déterminez-la.

Question 5) À l'aide de tout ce qui précède, montrez qu'une telle fonction f n'existe pas.

Partie 3 - Conséquence

Question 1)

a) Montrez qu'il existe $a > 0$ tel que $f(a) = 0$.

b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f\left(\dfrac{pa}{2^n}\right) = 0$.

Question 2) Soit x un réel, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \left\lfloor \dfrac{2^n x}{a} \right\rfloor$. Montrez que la suite $\left(\dfrac{p_n a}{2^n}\right)$ converge vers x.

Question 3) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Devoir non surveillé 9 - Corrigé

Problème 1

Partie 1

Question 1)

a) En remplaçant x et y par 0 dans la condition 2), on a $(1 - f(0)^2) \times f(0) = 2f(0)$, ce qui donne l'équation $f(0) \times (1 + f(0)^2) = 0$. Or $f(0) \in \mathbb{R}$ donc $1 + f(0)^2 \neq 0$, donc on obtient $f(0) = 0$.

b) En remplaçant y par $-x$ dans la condition 2), on a $(1 - f(x)f(-x)) \times f(0) = f(x) + f(-x)$. Or $f(0) = 0$ donc $f(x) + f(-x) = 0$ donc $f(-x) = f(x)$. Ceci est vrai pour tout x réel, donc f est impaire.

Question 2) Par l'absurde. On suppose qu'il existe x, y deux réels tels que $1 - f(x)f(y) = 0$. Alors d'après la condition 2), on en déduit que $f(x) + f(y) = 0$ donc que $f(y) = -f(x)$. En reportant dans l'équation $1 - f(x)f(y) = 0$, on obtient $1 + f(x)^2 = 0$, ce qui est impossible puisque $f(x)$ est un réel.

D'où : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $1 - f(x)f(y) \neq 0$.

Question 3) Soit $x \in A$. On montre le résultat attendu par récurrence sur p. On pose $\mathscr{P}(p)$ le prédicat « $px \in A$ ».

$0 \in A$ d'après la question 1 donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(p)$ est vraie, alors $f(x) = f(px) = 0$. Or $f((p+1)x) = f(px + x) = \dfrac{f(x) + f(px)}{1 - f(x)f(px)}$ donc $f((p+1)x) = 0$ donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie.

Or f est impaire donc pour tout $p \in \mathbb{Z}_-$, $f(px) = -f(-px) = -0$. Donc le résultat reste valable pour tous les entiers relatifs.

Question 4) f est continue en 0 et $f(0) = 0$ donc $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = 0$.

Donc pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0 + h) = \dfrac{f(x_0) + f(h)}{1 - f(x_0)f(h)}$ a pour limite $f(x_0)$ quand h tend vers 0 d'après les th. d'opérations sur les limites. Ce qui signifie que f est continue en x_0.

Comme ceci est vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

Question 1) f ne s'annule donc qu'en 0. Comme elle est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle ne s'annule pas sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, elle est donc de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, d'après le th. des valeurs intermédiaires.

Question 2) Pour tout $x > 0$, $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1 - f(x)^2}$, or x et $2x$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $f(2x) > 0$ et $f(x) > 0$, donc $1 - f(x)^2 > 0$.

Ceci donne : pour tout $x > 0$, $f(x)^2 < 1$ donc comme $f(x) > 0$, on en déduit $0 < f(x) < 1$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question 3) $f(x - y) = f(x + (-y)) = \dfrac{f(x) + f(-y)}{1 - f(x)f(-y)}$, or f est impaire donc $f(x - y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{1 + f(x)f(y)}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tel que $x > y$. Alors $x - y > 0$ donc $f(x - y) > 0$, donc comme $f(x) > 0$ et $f(y) > 0$, on en déduit d'après la relation précédente que $f(x) - f(y) > 0$, donc que $f(x) > f(y)$.

Ceci prouve que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question 4) f est majorée et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après le th. de la limite monotone, f a une limite réelle ℓ en $+\infty$.

On sait que $(1 - f(x)^2)f(2x) = 2f(x)$ et aussi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(2x) = \ell$ (par composition des limites).

Donc en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient par passage à la limite $(1 - \ell^2)\ell = 2\ell$, ce qui donne $\ell(1 + \ell^2) = 0$, or $1 + \ell^2 > 0$, donc $\ell = 0$.

Question 5) On a montré que $f(0) = 0$ et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on devrait avoir $\ell > 0$. Or on trouve $\ell = 0$. il y a donc contradiction. L'hypothèse de cette partie est donc fausse : il n'existe aucune solution du problème qui ne s'annule qu'en 0.

Partie 3

Question 1)

a) On sait qu'une solution du problème s'annule en 0 mais ne peut pas s'annuler seulement en 0, donc elle doit s'annuler en un autre point. Comme elle est impaire, elle s'annule donc en deux points autres que 0, qui sont opposés, donc l'un des deux points est strictement positif : il existe donc $a > 0$ tel que $f(a) = 0$.

b) D'abord on sait que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f(pa) = 0$ d'après la partie 1, question 3.
Puis on fait une récurrence sur n.
Soit $P(n)$ la proposition « $\forall p \in \mathbb{Z} \quad \frac{pa}{2^n} = 0$ ».
$P(0)$ est vraie, car $\frac{pa}{2^0} = pa$ et on a montré juste avant que $f(pa) = 0$ pour tout entier relatif p.
Si $P(n)$ est vraie, alors en remplaçant x et y par $\frac{pa}{2^{n+1}}$ dans la condition 2),
on obtient $f\left(2\frac{pa}{2^{n+1}}\right) = \frac{2f\left(\frac{pa}{2^{n+1}}\right)}{\left(1 - f\left(\frac{pa}{2^{n+1}}\right)^2\right)}$,
or $f\left(2\frac{pa}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{pa}{2^n}\right) = 0$ par hypothèse de récurrence, donc on obtient $0 = \frac{2f\left(\frac{pa}{2^{n+1}}\right)}{\left(1 - f\left(\frac{pa}{2^{n+1}}\right)^2\right)}$, donc $f\left(\frac{pa}{2^{n+1}}\right) = 0$, donc $P(n+1)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Question 2) Par définition de la partie entière, on a $p_n \leqslant \frac{2^n x}{a} < p_n + 1$, donc comme 2^n et a sont strictement positifs, on a $\frac{p_n a}{2^n} \leqslant x < \frac{(p_n+1)a}{2^n}$, ce qui s'écrit encore $x - \frac{a}{2^n} < \frac{p_n a}{2^n} \leqslant x$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} x - \frac{a}{2^n} = x$ donc d'après le th. d'encadrement, la suite $\left(\frac{p_n a}{2^n}\right)$ converge vers x.

Question 3) Soit $x \in \mathbb{R}$, x est la limite d'une suite u telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$. Or f est continue en x (d'après la partie 1, question 3), donc par composition des limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x)$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$.

La suite constante égale à 0 converge aussi vers $f(x)$, donc $f(x) = 0$.