FONCTIONS DÉRIVABLES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Les fonctions suivantes sont-elle dérivables au point indiqué ? Si oui, donnez la valeur de la dérivée en ce point.

a) $x \mapsto \sqrt{|x-1|^3}$ en 1

b) $t \mapsto \cos(\sqrt{t})$ et $t \mapsto \sin(\sqrt{t})$ en 0 à droite

c) $t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\arctan t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ en 0

d) $t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t+t^2)}{t-t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ en 0

e) $x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en 0

f) $t \mapsto \begin{cases} \arctan \dfrac{t^2+1}{t} & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases}$ en 0 à droite

***2)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable , positive telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $f'(a)f'(b) \leqslant 0$.

***3)** Soit f une fonction définie sur un intervalle I, qui s'annule en un point a de $\overset{\circ}{I}$ et qui est dérivable en a. Montrez que $|f|$ est dérivable en a si et seulement si $f'(a) = 0$.

****4)** Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. Montrez que si f admet des dérivées à droite et à gauche en x_0, alors $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ admet une limite réelle quand h tend vers 0.

Que dire de la réciproque ?

***5)** Déterminez les valeurs des paramètres a, b tels que les fonctions suivantes soient prolongeables par continuité en 0, et que leurs prolongements soient dérivables en 0 :

a) $f : x \mapsto a + \dfrac{\sin x}{x}$ si $x > 0$, $x \mapsto \dfrac{\cos x - b}{x}$ si $x < 0$

b) $g : t \mapsto \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{2}t$ si $t > 0$, $t \mapsto \dfrac{e^t - b - t}{t}$ si $t < 0$

c) $h : t \mapsto a\dfrac{\ln(1+t) - t}{1 - \cos t}$ si $t > 0$, $t \mapsto \dfrac{\sin t - t - bt^2}{\sin^2 t}$ si $t < 0$

****6)** Soit a, b, c trois réels. Montrez que l'équation $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0$ admet au moins une solution dans $]0,1[$.

****7)** Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$ telle que $\lim\limits_a f = \lim\limits_b f = +\infty$. Montrez qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$: on pourra considérer $g = \exp \circ (-f)$.

****8)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $f'(d) = 0$.

Montrez que ce résultat est encore vrai si $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

****9)** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) = 0$ et pour tout $x \in]0,1[$ $f(x) > 0$. Soit a, b deux réels strictement positifs.

a) Déterminez une fonction dérivable telle que sa dérivée soit la fonction $t \mapsto a\dfrac{f'(t)}{f(t)} - b\dfrac{f'(1-t)}{f(1-t)}$.

b) Montrez qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $a\dfrac{f'(c)}{f(c)} = b\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.

****10)** Répondez aux question suivantes en utilisant le th. de Rolle.

a) Soit a, b deux réels. Montrez qu'il existe un réel c tel que $a \cos c \; e^{\sin c} + b \sin c \; e^{\cos c} = 0$.

b) Montrez qu'il existe $c \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan c = e^{\sin c - \cos c}$.

c) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$, dérivable sur $[0,1]$, telle que $f(0) = f(1)$: montrez qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c)f(1-c) + f(c)f'(1-c) = 0$.

11)

a) Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrez qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$(f(b)-f(a))\,g'(c) = (g(b)-g(a))\,f'(c).$$

b) *Règle de l'Hospital :* Soient f, g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $a \in I$ telles que
- $\triangleright$ g' ne s'annule pas sur $I \backslash \{a\}$.
- $\triangleright$ $f(a) = g(a) = 0$
- $\triangleright$ $\dfrac{f'}{g'}$ admet une limite ℓ en a.

Montrez que $\dfrac{f}{g}$ admet ℓ pour limite en a.

c) Calculez
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\ln(1+x)-\ln(1-x)}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2}.$$

***12)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Montrez qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

***13)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

Montrez qu'il existe $c \in\ ]a,b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

*14)** Justifiez les inégalités suivantes :

a) pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|\arctan x - \arctan y| \leqslant |x-y|$

b) pour tout $(x,y) \in [1,+\infty[^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \leqslant \dfrac{1}{n}|x-y|$

c) pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $1+x \leqslant e^x \leqslant 1+xe^x$

d) pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan x \leqslant x$

15) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et k un réel tels que $|f'| \leqslant k < 1$ sur $\mathbb{R}$.

On pose $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+f(y), y+f(x)) \end{array}$.

Montrez que F est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

16) Soit a, b, c trois réels. Montrez que l'équation $e^x = ax^2+bx+c$ a au plus 3 solutions.

17) Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I et $(x_0, \dots, x_n) \in I^{n+1}$ tel que $x_0 < \dots < x_n$ et $f(x_0) = \dots = f(x_n) = 0$.

Montrez par récurrence sur n qu'il existe $c \in I$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Application : soit P une fonction polynôme de degré n, montrez que l'équation $e^x = P(x)$ a au plus $n+1$ solutions.

18) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ telle que $f'(0) = 0$. Montrez qu'il existe une application $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[0+\infty[$ telle que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $g(x^2) = f(x)$.

19) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.

a) Montrez que f est prolongeable par continuité en 0, et que ce prolongement est dérivable en 0. Montrez aussi qu'il n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Précisez $f'(0)$. f est-elle monotone au voisinage de 0 ?

c) Que penser de l'énoncé : « si une fonction f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) > 0$, alors la fonction f est croissante au voisinage de x_0 » ?

d) Et si on remplace l'hypothèse « f dérivable en x_0 » par « f est de classe C^1 au voisinage de x_0 » ?

****20)** Montrez que les fonctions suivantes sont prolongeables en des fonctions de classe C^1 au voisinage de 0 :

a) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ b) $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ c) $u \mapsto \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{\ln(1+u)}$

d) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ e) $x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$ f) $t \mapsto \dfrac{e^t - \sqrt{\cos t}}{\ln(1+t)}$

***21)** Calculez la dérivée n-ème des fonction suivantes :

a) $x \mapsto (7x^2-x+1)e^{2x}$ b) $x \mapsto \sin^2 x$ c) $x \mapsto e^x \sin x$

d) $x \mapsto x^2(1+x)^p$, $p \in \mathbb{N}$.

****22)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez la dérivée n-ème de la fonction $x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)$ définie sur $]-1,+\infty[$.

****23)**

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculez la dérivée n-ème de

$$x \longmapsto x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

b) Déduisez-en les dérivées n-èmes de

$$x \longmapsto x^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad x \longmapsto x^{n-1}e^{1/x}.$$

****24)** Soit a, b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = ax + b$.

a) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(ax+b) = af(x)+b$.

b) Déduisez-en que f' est constante.

c) Déterminez f.

****25)** Déterminez les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que (les questions sont indépendantes)

a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x+f(y))$;

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(y) - f(x) = (y-x)f'\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

c) $\exists \theta \in]0,1[\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(y)-f(x) = (y-x)f'(\theta x + (1-\theta)y)$.