FONCTIONS CONVEXES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Déterminez l'éventuelle propriété de convexité des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués :

a) $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ b) $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

c) $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ d) $x \mapsto \arctan x$ sur $\mathbb{R}$

***2)** Justifiez les inégalités suivantes sans étude de fonctions :

a) pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$ b) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{t} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(t-1)$

c) pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{e^a + e^b}{2}$ d) pour tout $(a,b) \in]1,+\infty[^2$, $\ln \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{\ln a . \ln b}$

****3)** Inégalités entre moyennes.

a) Quelle est la convexité de la fonction ln ?

b) Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Justifiez l'inégalité :

$$\sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

c) Comparez les réels $\sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n}$ et $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$.

****4)** Montrez que pour tout $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in [0,+\infty[^{2n}$, $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i)\right)^{1/n}$.

***5)** Montrez que si f et g sont convexes sur $\mathbb{R}$ et g croissante sur $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est convexe. Si on supprime l'hypothèse de croissance de g, ce résultat est-il encore vrai ?

****6)** Soit f une fonction réalisant une bijection continue de I dans J, intervalles. Si f est convexe et strictement croissante sur I, que dire de la convexité de la réciproque ?

****7)** Montrez qu'une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et majorée est constante.

****8)** Montrez qu'une fonction convexe sur un intervalle I qui s'annule trois fois en $a < b < c$ est nulle sur $[a,c]$.

****9)** Soit f une fonction strictement monotone, convexe et dérivable sur un segment $[a,b]$ telle que $f(a).f(b) < 0$. Montrez que l'une des tangentes en a ou en b recoupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse $c \in [a,b]$.

****10)** Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ convexe.

a) Montrez que $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

b) Montrez que si a est un réel, alors $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

*****11)** Soit f une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$. Montrez que $\ln \circ f$ est convexe si et s.si pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.

*****12)** Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Montrez que f est convexe si et s.si pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$.