Dérivabilité

Dans tout le cours, I, J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

1 Nombre dérivé en un point

1.1 Dérivabilité en un point, nombre dérivé en un point

Définition. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, a un élément de I.
On appelle (fonction) taux d'accroissement de f en a l'application

$$\begin{aligned} \tau_a\colon\ I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

On dit que f est dérivable en a quand $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers une limite **finie** quand x tend vers a.
Si f est dérivable en a, on appelle nombre dérivé de f en a le nombre réel

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Remarque. Lorsqu'on étudie « à la main » la limite du taux d'accroissement, on effectue très souvent le changement d'origine $h = x-a$ et on étudie $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand $h \to 0$ (ce qui permet d'utiliser les équivalents ou les DL usuels).

Exercices **:**

1) Étude de la dérivabilité en 0 du prolongement par continuité de $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}$.

1.2 Interprétation géométrique, DL d'ordre 1, continuité

On suppose que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$. Pour tout $x \in I$ on note $M(x)$ le point de la courbe représentative de f qui a pour abscisse x.
La sécante $\big(M(a)M(x)\big)$ se rapproche de la droite passant par $M(a)$ de pente $f'(a)$. Cette droite a pour équation

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a) \text{ ou } y = f(a) + f'(a)\,(x-a).$$

Proposition 1 (Lien entre dérivabilité et tangente à la courbe représentative)**.** *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.*
Si f est dérivable en a, la courbe représentative de f admet un tangente au point d'abscisse a qui a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)\,(x-a).$$

On en déduit que la fonction $x \mapsto f(a) + f'(a)\,(x-a)$ est la **meilleure approximation affine** de f au voisinage de a. Ceci se formalise à l'aide de la propriété suivante.

Proposition 2 (Développement limité d'ordre 1 d'une fonction dérivable)**.** *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors :*
f est dérivable en a si et seulement si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(a) + m\,(x-a) + o(x-a)$
Lorsque ces énoncés sont vrais, on a $f'(a) = m$.

On peut utiliser un d.l. à un ordre au moins 1 en a pour montrer que la fonction est dérivable en a.

Proposition 3. *Si une fonction est dérivable en a, alors elle est continue en a.*

Remarque. Évidemment la réciproque est fausse !

1.3 Dérivées à gauche, dérivées à droite

Définition. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, $\quad a \in I$.

On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a quand $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à droite (resp. à gauche) finie quand x tend vers a.

Lorsque f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a, on appelle cette limite nombre dérivé de f à droite (resp. à gauche) en a et on le note $f'_{\mathrm{d}}(a)$ (resp. $f'_{\mathrm{g}}(a)$).

Exercices :

1) Étude de $x \mapsto \sqrt{x-\ln(1+x)}$:

Proposition 4. *Si f est dérivable à droite en a, alors :*
- *f est continue à droite en a ;*
- *La courbe de f admet une demi-tangente à droite au point d'abscisse a dont l'équation est $y = f(a) + f'_{\mathrm{d}}(a)\,(x-a)$.*

Les mêmes propriétés valent pour les notions à gauche.

En outre, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a **et** *$f'_{\mathrm{d}}(a) = f'_{\mathrm{g}}(a)$. Lorsque c'est le cas, $f'(a)$ est égale à la valeur commune de $f'_{\mathrm{d}}(a)$ et $f'_{\mathrm{g}}(a)$.*

Définition. Lorsque f admet en a une dérivée à droite et une dérivée à gauche différentes $f'_{\mathrm{d}}(a) \neq f'_{\mathrm{g}}(a)$, on dit que le point d'abscisse a est un point anguleux sur la courbe de f.

1.4 Théorèmes opératoires

Proposition 5. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- *Si f et g sont dérivables en a, alors $f+g$, λf et fg sont dérivables en a et*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (\lambda f)'(a) = \lambda\, f'(a)$$
$$(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a).$$

- *Si de plus $g \neq 0$ au voisinage de a, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables en a et*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)} \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}$$

Proposition 6. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$.*
Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)\,.\,f'(a).$$

Proposition 7. *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$*

Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I dans $J = f(I)$.

Soit φ la réciproque de cette bijection.

Soit $t \in J$. Si de plus, f est dérivable en $\varphi(t)$ et si $f'\big(\varphi(t)\big) \neq 0$, alors φ est dérivable en t et

$$\varphi'(t) = \frac{1}{f'\big(\varphi(t)\big)}$$

Remarque. Si $f'\big(\varphi(t)\big) = 0$, alors φ n'est pas dérivable en t et la courbe de φ admet au point d'abscisse t une tangente verticale.

2 Fonction dérivée

Définition. Soit $f \colon I \to \mathbb{R}$.
- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en chaque point $a \in I$.
- Si f est dérivable sur I, on définit sa fonction dérivée par

$$\begin{aligned} f' \colon\ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

Proposition 8 (Théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables)**.** *Soit f et g deux fonctions définies sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Si f et g sont dérivable sur I, alors $f+g$, λf et fg sont dérivables sur I et

$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Si de plus g ne s'annule sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)' = -\frac{g'}{g^2}, \quad \Big(\frac{f}{g}\Big)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proposition 9. *Soit f une fonction définie sur I, g définie sur J.*
Si f est dérivable sur I, g dérivable sur J et que $f(I) \subset J$,
alors $(g \circ f)$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = g' \circ f \,.\, f'$.

Proposition 10. *Soit f une fonction définie sur I, g définie sur J.*
Si f réalise une bijection de I dans $J = f(I)$, f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors sa bijection réciproque φ est dérivable sur $J = f(I)$ et $\varphi' = \dfrac{1}{f' \circ \varphi}$.

Pour déterminer le plus grand domaine sur lequel une fonction f est dérivable :
- On part des fonctions usuelles pour lesquelles on connait par cœur le domaine de dérivabilité.
- Les théorèmes opératoires donnent la dérivabilité de f sur un certain intervalle.
- S'il manque certains points du domaine de définition de f, on les étudie séparément (limite du taux d'accroissement, dérivation au point manquant).

***Exercices* :**

1) Étudiez la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{\sqrt{1+2x} - \cos x}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$. Est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ?

3 Théorèmes fondamentaux pour les fonctions dérivables

3.1 Condition nécessaire pour les extrema locaux

Proposition 11. *Soit f une fonction définie sur I et a un point* ***intérieur*** *à I.*
Si f est dérivable en a et f possède une valeur extrémale en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarque. La réciproque est fausse !

3.2 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

Théorème 1. *Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$.*
Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Le théorème suivant est équivalent.

Théorème 2. *Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$.*
Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

3.3 Lien entre signe de la dérivée et variations d'une fonction

Théorème 3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur une partie I' égale à I privé de quelques points.*

- ▷ *Si $f' > 0$ sur I', alors f est strictement croissante sur I.*
- ▷ *Si $f' < 0$ sur I', alors f est strictement décroissante sur I.*
- ▷ *Si $f' \geqslant 0$ sur I', alors f est croissante sur I.*
- ▷ *Si $f' \leqslant 0$ sur I', alors f est décroissante sur I.*
- ▷ *Si $f' = 0$ sur I', alors f est constante sur I.*

Remarque. Ce résultat inclut donc celui où la dérivée s'annule en quelques points.

3.4 Théorème de l'inégalité des accroissements finis

Théorème 4. *Soit f une fonction définie sur I, M un réel positif.*
Si f est dérivable sur I et $|f'| \leqslant M$ sur I, alors pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.

On peut donner une deuxième forme de ce résultat.

Théorème 5. *Soit f une fonction définie sur I, m, M deux réels.*
Si f est dérivable sur I et $m \leqslant f' \leqslant M$ sur I, alors
pour tout $(x, y) \in I^2$, si $x \leqslant y$ alors $m(y - x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant M(y - x)$.

Remarque. Il suffit en fait que f soit continue sur I et dérivable sur I privé de quelques points pour que cela soit vrai.

On a donc montré le théorème suivant :

Proposition 12. *Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et si $|f'|$ est majorée sur I par un réel M, alors f est M-lipschitzienne sur I.*

Remarque. La réciproque est fausse ! Une fonction peut être lipschitzienne sans être dérivable.

***Exercices* :**

1) Montrez que la fonction sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2) Montrez que la fonction $\sqrt{\ }$ est lipschitzienne sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$, mais qu'elle ne l'est pas sur $[0, +\infty[$.
3) Montrez que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple d'utilisation : étude de suites

Définition. Une fonction est dite contractante sur I quand elle est lipschitzienne sur I de rapport **strictement** inférieur à 1.
f est contractante sur I quand il existe $K < 1$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$

On dispose alors d'un résultat bien pratique, que vous devez savoir redémontrer.

Proposition 13. *Si f est contractante sur un intervalle fermé I, stable par f, alors f possède un unique point fixe a et toute suite définie par les deux conditions « $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ » converge vers a*

***Exercices* :**

1) Montrez que la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3 + u_n}$ converge. Précisez la valeur de sa limite.
2) Montrez que la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n^2}$ converge.
3) Montrez que la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n^2}$ converge.

L'avantage de ce cas de figure est qu'on dispose alors d'un moyen simple de contrôler la précision des calculs : on peut estimer *a priori* un rang n tel que u_n soit une valeur approchée de la limite à une précision donnée.

3.5 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 6. *Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.*
Si f est continue sur I, dérivable sur $I - \{a\}$ et si $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Remarque.

- Le résultat reste vrai pour une limite à droite ou à gauche, on obtient alors la dérivabilité d'un seul côté.
- En général, on utilise ce théorème lorsqu'on veut étudier la dérivabilité en a d'une fonction qu'on vient de prolonger par continuité en a.

3.6 Intégration des d.l.

Lemme 1. *Soit f une fonction continue au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{N}$. Soit F une primitive de f.*
Si $f(t) = o(t^n)$ quand t tend vers 0, alors $F(t) - F(0) = o(t^{n+1})$ quand t tend vers 0.

Proposition 14. *Soit f une fonction continue ayant un d.l. en 0 à l'ordre n. Soit F une primitive de f. Alors F a un d.l. en 0 à l'ordre $n + 1$, obtenu en intégrant terme à terme le d.l. de f et en n'oubliant pas la constante d'intégration $F(0)$.*

4 Dérivées successives

4.1 Définitions et exemples

Si f est dérivable sur I, f' est une fonction définie sur I. On peut donc essayer de la dériver : quand c'est possible, on obtient la dérivée seconde f'', et ainsi de suite...

Définition. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. On définit par récurrence sur n les notions suivantes :
- Par convention, on dit que f est toujours dérivable 0 fois sur I, et on définit la dérivée d'ordre 0 de f par $f^{(0)} = f$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est dérivable n fois sur I si elle est dérivable $(n-1)$ fois sur I et que sa dérivée d'ordre $(n-1)$, la fonction $f^{(n-1)}$, est dérivable sur I.
  On définit alors la dérivée d'ordre n de f par $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Remarque. $f^{(0)}$ désigne f, $f^{(1)}$ désigne f' et $f^{(2)}$ est aussi notée f''. À partir de trois dérivations, on n'utilise plus de primes.

La dérivée d'ordre n de f est également notée $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Enfin, il est facile de montrer que f est $p+q$ fois dérivable sur I si et s.si f est p fois dérivable et $f^{(p)}$ est q fois dérivable sur I. Dans ce cas, on a l'égalité $\left(f^{(p)}\right)^{(q)} = f^{(p+q)}$.

Exercices :

1) Étude des dérivées successives des fonctions suivantes : $x \mapsto e^{\lambda x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$, $x \mapsto x^p$ quand $p \in \mathbb{N}$.

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f est de classe C^n sur I si f est dérivable n fois sur I et que sa **dérivée d'ordre** n, $f^{(n)}$, est une fonction continue sur I.
On dit que f est de classe C^∞ sur I si f est dérivable n fois sur I quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on notera $\mathrm{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble comprenant toutes les fonctions de classe C^n sur I.

Remarque. « f est de classe C^0 sur I » signifie « f est continue sur I » ;
« f est de classe C^1 sur I » signifie « f est dérivable sur I et f' est continue sur I ».

On remarquera que pour toutes les fonctions usuelles, les intervalles sur lesquelles elles sont dérivables sont en fait des intervalles sur lesquelles elles sont de classe C^∞. Par exemple, $x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ (et non $[0, +\infty[$ car elle n'est pas dérivable en 0.

Exercices :

1) Montrez que la fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Proposition 15. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $n \in \mathbb{N}^*$.*
- ▷ *Si f est de classe C^n sur I, alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f est de classe C^p sur I*
- ▷ *f est de classe C^n sur I si et seulement si f est dérivable sur I et f' est de classe C^{n-1} sur I, ou ce qui revient au même, f est de classe C^{n-1} sur I et $f^{(n-1)}$ est de classe C^1 sur I*

Les ensembles $\mathrm{C}^n(I, \mathbb{R})$ forment donc une chaîne d'inclusions :

$$\mathrm{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \subset \ldots \subset \mathrm{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}) \subset \mathrm{C}^n(I,\mathbb{R}) \subset \ldots \subset \mathrm{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathrm{C}^0(I,\mathbb{R})$$

4.2 Théorèmes opératoires pour les dérivées successives

Proposition 16. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, f et g deux fonctions de classe C^n sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Alors :
- *$f+g$ est de classe C^n sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$*
- *λf est de classe C^n sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$*
- ***Formule de Leibniz :*** *$f \times g$ est de classe C^n sur I et*

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}$$

***Exercices* :**

1) Dérivées successives de $x \mapsto x^3\, e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

Pour les autres opérations usuelles sur les fonctions, le caractère C^n est le plus souvent préservé mais il n'y a pas de formule explicite simple pour la dérivée d'ordre n.

Proposition 17. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, f et g deux fonctions de classe C^n sur I.*
Alors :

— *Si de plus g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe C^n sur I.*
— *Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$ sont telles que $f(I) \subset J$ et f et g sont de classe C^n sur I et J respectivement, alors $(g \circ f)$ est de classe C^n sur I.*
— *Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ réalise une bijection de I dans J, f de classe C^n et f' ne s'annule pas sur I, alors la bijection réciproque est de classe C^n sur $J = f(I)$.*

Exemples.

— Les fonctions rationnelles (*i.e.* quotients de deux polynômes) sont de classe C^∞ sur tout intervalle où elles sont définies.
— $f\colon x \mapsto e^{-1/x^2}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

4.3 Formule de Taylor-Young

Proposition 18. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, n fois dérivable sur I. Alors pour tout $t_0 \in I$, f possède un d.l. en t_0 à l'ordre n :*
il existe une fonction ε définie sur I telle que

$$\begin{cases} \text{pour tout } t \in I, \quad f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \dfrac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + (t-t_0)^n \varepsilon(t) \\ \lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0. \end{cases}$$

Attention ! La réciproque est fausse : une fonction peut très bien avoir un d.l. à l'ordre n en un point et ne pas être dérivable n fois en ce point.

4.4 Théorème de prolongement C^1

Théorème 7. *Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.*
Si f est continue sur I, de classe C^1 sur $I - \{a\}$ et si $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f est donc de classe C^1 sur I.

Remarque. En général, on utilise ce théorème lorsqu'on veut prolonger une fonction en une fonction de classe C^1 en la prolongeant d'abord par continuité, puis en vérifiant ainsi que le prolongement est de classe C^1.
Mais en aucun cas on ne prolonge la dérivée ! !

***Exercices* :**

1) Montrez que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$.
2) Montrez que la fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos(\sqrt{x})}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
3) Montrez que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

On peut généraliser à des classes de dérivabilité supérieures.

Corollaire 1. *Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.*
Si f est continue sur I, de classe C^k sur $I - \{a\}$ et si f', f'', …, $f^{(k)}$ ont chacune une limite réelle en a, alors f est de classe C^k sur I.

Corollaire 2. *Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$.*
Si f est continue sur I, de classe C^∞ sur $I - \{a\}$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ a une limite réelle en a, alors f est de classe C^∞ sur I.

***Exercices* :**

1) Montrez que la fonction $x \mapsto \begin{cases} x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

2) Montrez que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ est prolongeable en une fonction de classe C^2 sur $[0, +\infty[$.

3) Montrez que la fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.