

Problème 1 - librement inspiré de Centrale PC 1998 - math 1

Dans ce problème, on note $I =]0, +\infty[$, $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs complexes.

Si $f \in \mathcal{C}$ et $s > 0$, on pose $f_s : I \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$t \longmapsto \frac{f(t)}{t+s}$$

Enfin, on pose $\mathcal{L} = \{f \in \mathcal{C} / f \text{ intégrable sur } I\}$ et $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{C} / \forall s > 0 \quad f_s \in \mathcal{L}\}$.

I. Étude de $\mathcal{E}$

Q 1. Montrez que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.

Q 2. Montrez que $f \in \mathcal{E}$ si et s.si f est intégrable sur $]0, 1]$ et $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Q 3. Montrez que si $f \in \mathcal{E}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $s > 0$, $t \mapsto \frac{f(t)}{(t+s)^n}$ est intégrable sur I .

Q 4. Justifiez que $\mathcal{L}$ est strictement inclus dans $\mathcal{E}$.

Quand $f \in \mathcal{E}$, on pose $\widehat{f} : s \mapsto \int_0^{+\infty} f_s(t) dt$.

Q 5. Quelques exemples.

- Dans cette sous-question, on pose $f : t \mapsto \frac{1}{t+1}$. Justifiez que $f \in \mathcal{E}$ et calculez explicitement $\widehat{f}(s)$ en fonction de s .
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $g_\alpha : t \mapsto t^{\alpha-1}$. Montrez que $g_\alpha \in \mathcal{E}$ si et s.si $\alpha \in]0, 1[$ et dans ce cas, montrez que $\widehat{g_\alpha}$ est colinéaire à g_α , le coefficient de colinéarité étant une intégrale que vous ne chercherez pas à calculer, qui est notée $J(\alpha)$.

II. Propriétés de $\widehat{f}$

Q 6. Soit $f \in \mathcal{E}$, $r > 0$ fixé.

- Montrez que pour tout $s > 0$, $|\widehat{f}(s) - \widehat{f}(r)| \leq \frac{|s-r|}{s} \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+r} dt$.
- Déduisez-en que $\widehat{f}$ est continue en r .

Comme r est quelconque, ceci prouve donc que $\widehat{f}$ est continue sur I .

Q 7. Soit $f \in \mathcal{E}$.

- Soit $r > 0$ fixé.

Montrez que pour tout $s > 0$, $\widehat{f}(s) = \widehat{f}(r) - (s-r) \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2} dt + (s-r)^2 \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2(t+s)} dt$.

- En vous inspirant de la question précédente, montrez que $\widehat{f}$ est dérivable sur I et que pour tout $r > 0$,

$$\widehat{f}'(r) = - \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2} dt$$

Q 8. Il vient d'être montré que si $f \in \mathcal{E}$, alors $\widehat{f}$ est dérivable sur I . En réitérant, on peut montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^∞ sur I (il n'est pas demandé de le faire). Conjecturez une expression de $\widehat{f}^{(n)}(r)$ à l'aide d'une intégrale.

Q 9. Soit $s \geq 1$, $a > 0$ et $f \in \mathcal{E}$.

- Montrez que $|\widehat{f}(s)| \leq \frac{1}{s} \int_0^a |f(t)| dt + \int_a^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+1} dt$.
- Montrez que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \widehat{f}(s) = 0$.

Q 10. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{L}$ et $A = \int_0^{+\infty} f \neq 0$. Montrez que $\widehat{f}(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{s}$.

Q 11. Dans cette question, f est la fonction $t \mapsto e^{-t}$. On note $g = \widehat{f}$ pour alléger les notations.

a) Montrez que pour tout $s > 0$, $g(s) = e^s \int_s^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

b) Montrez que $\int_s^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-s}}{s}$.

c) Montrez que $g(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} -\ln s$.

III. Calcul de $J(\alpha)$ dans un cas particulier

Soit $\alpha \in]0, 1[$. Le symbole $J(\alpha)$ désigne l'intégrale calculée en question **5b** de la partie **I** : $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u} du$.

Q 12. Montrez que $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(t+1)} dt$. Déduisez-en que $J(1-\alpha) = J(\alpha)$.

Q 13. En posant $\beta = \frac{1}{\alpha}$, montrez que $J(\alpha) = \beta \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\beta} dx$.

Dans la suite de cette partie, on étudie un cas particulier : on suppose désormais que $\beta = 2n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et pour alléger les notations, on note simplement K au lieu de $J\left(\frac{1}{2n}\right)$.

Q 14. Montrez que $K = 2n \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt$ (indication : changement de variable), puis que $K = n \int_0^{+\infty} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt$,
 enfin que $K = \frac{n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt$.

n étant fixé, pour $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$, on pose $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ et $\omega_k = e^{i\theta_k}$.

Q 15.

a) Soit P, Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, $Q \neq 0$ et a une racine simple de Q . Dans la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$, la partie polaire associée à a est de la forme $\frac{\lambda}{X-a}$.

Donnez une expression de λ en fonction de P , Q' et a .

b) Montrez que la fraction $F = \frac{1+X^{2n-2}}{1+X^{2n}}$ se décompose en éléments simples comme suit :

$$F = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{i \sin \theta_k}{X - \omega_k}$$

Q 16. En regroupant judicieusement des termes de cette somme, montrez que

$$F = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \theta_k}{X^2 - 2X \cos \theta_k + 1}$$

Q 17. Montrez alors que $K = \pi \sum_{k=0}^{n-1} \sin \theta_k$, puis que $K = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

IV. Développement en série de $J(\alpha)$

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose $j(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha(t+1)} dt$.

Q 18. Montrez que $J(\alpha) = j(\alpha) + j(1-\alpha)$.

Q 19.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $j(\alpha) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1-\alpha} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1-\alpha}}{1+t} dt$.

b) Déduisez-en que

$$j(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-\alpha}$$

Q 20. Montrez que

$$J(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 - \alpha^2}$$

Q 21. Montrez que $J(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\alpha}$.

Problème 1

I.

Q 1. Une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I est intégrable.

On en déduit que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $C^0(I, \mathbb{C})$

Avec $f(x) = \exp(-x)$, f_s est continue sur $[0, +\infty[$ et $f_s(u) = o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ quand $u \rightarrow +\infty$.

On en déduit que f est dans $\mathcal{E}$ donc $\mathcal{E} \neq \{0\}$.

Q 2. $f \in \mathcal{E}$ si et s.si les intégrales $\int_0^1 \frac{|f(t)|}{t+s} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+s} dt$ convergent.

Comme on étudie des fonctions à valeurs positives, on peut appliquer les th. de comparaison.

D'abord, $\frac{|f(t)|}{t+s} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{|f(t)|}{s}$ donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{|f(t)|}{t+s} dt$ converge si et s.si $\int_0^1 \frac{|f(t)|}{s} dt = \frac{1}{s} \int_0^1 |f(t)| dt$ converge, i.e. f est intégrable sur $]0, 1[$.

Et de même, $\frac{|f(t)|}{t+s} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|f(t)|}{t}$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+s} dt$ converge si et s.si $\int_1^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t} dt$ converge, i.e. $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc $f \in \mathcal{E}$ si et s.si f est intégrable sur $]0, 1[$ et $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Q 3. Soit $f \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 0$. Alors f est intégrable sur $]0, 1[$ et $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Or $\frac{|f(t)|}{(t+s)^n} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{|f(t)|}{s^n}$ donc par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto \frac{f(t)}{(t+s)^n}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

De même, pour tout $t \geq 1$ et $s > 0$, $(t+s)^n \geq t^n \geq t$ donc $\frac{|f(t)|}{(t+s)^n} \leq \frac{|f(t)|}{t}$ donc par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto \frac{f(t)}{(t+s)^n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc $t \mapsto \frac{f(t)}{(t+s)^n}$ est intégrable sur I .

Q 4. Soit $f \in \mathcal{L}$. f_s est continue sur I et $|f_s(u)| \leq \frac{1}{s} |f(u)|$ donc f_s est intégrable sur I . Et donc $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$.

En considérant $f : u \mapsto \frac{1}{u+1}$, f n'est pas dans $\mathcal{L}$ mais est dans $\mathcal{E}$, puisque f_s est continue sur $[0, +\infty[$ et $|f_s(u)| \leq \frac{1}{u^2}$ pour $u \geq 1$. Donc $\mathcal{L}$ est strictement inclus dans $\mathcal{E}$.

Q 5.

a) Si $s \neq 1$, on décompose la fraction $\frac{1}{(t+1)(t+s)}$ en éléments simples : $\frac{1}{(t+1)(t+s)} = \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+s} \right)$.

Donc $\widehat{f}(s) = \frac{1}{s-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+s} \right) dt = \frac{1}{s-1} [\ln(t+1) - \ln(t+s)]_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{s-1} \left[\ln \frac{t+1}{t+s} \right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{\ln s}{s-1}$.

Si $s = 1$, alors $\widehat{f}(1) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2} dt = \left[\frac{-1}{t+1} \right]_{t=0}^{+\infty} = 1$.

b) Avec $f = g_\alpha : t \mapsto t^{\alpha-1}$, f_s est continue sur I et $f_s(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{s} t^{1-\alpha}$ et $f_s(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-\alpha}}$.

On en déduit que f_s est intégrable sur I si et seulement si $1 - \alpha < 1$ et $2 - \alpha > 1$, soit $\alpha \in]0, 1[$.

Conclusion : $g_\alpha \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \alpha \in]0, 1[$

Alors en utilisant le changement de variable $t = s \times u$,

$$\widehat{g_\alpha}(s) = \int_I \frac{t^{\alpha-1}}{t+s} dt = s^{\alpha-1} \int_I \frac{u^{\alpha-1}}{u+1} du = \widehat{g_\alpha}(1) \times g_\alpha(s)$$

II.

Q 6.

a) Pour tout $s > 0$,

$$|\hat{f}(s) - \hat{f}(r)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{f(t)}{t+s} - \frac{f(t)}{t+r} \right| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| \times \left| \frac{r-s}{(t+s)(t+r)} \right| dt = |r-s| \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(t+s)(t+r)} dt$$

$$\text{et } (t+s)(t+r) \geq s(t+r), \text{ donc } |\hat{f}(s) - \hat{f}(r)| \leq |r-s| \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{s(t+r)} dt = \frac{|s-r|}{s} \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+r} dt.$$

b) Quand s tend vers $r > 0$, le quotient $\frac{|s-r|}{s}$ tend vers 0 et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+r} dt$ ne dépend pas de s , donc le produit $\frac{|s-r|}{s} \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+r} dt$ tend vers 0, donc par encadrement, $\hat{f}(s)$ tend vers $\hat{f}(r)$, ce qui signifie que $\hat{f}$ est continue en r

Q 7.

a) Simple calcul.

b) Pour $s \neq r$, le taux d'accroissement $\frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{s-r}$ vaut donc $-\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2} dt + (s-r) \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2(t+s)} dt$.

$$\text{Or de la même façon, } \left| (s-r) \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2(t+s)} dt \right| \leq \frac{|s-r|}{s} \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(t+r)^2} dt$$

$$\text{et donc } \lim_{s \rightarrow r} (s-r) \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2(t+s)} dt = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{s \rightarrow r} \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{s-r} = -\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2} dt, \text{ ce qui signifie que } \hat{f} \text{ est dérivable en } r \text{ et } \hat{f}'(r) = -\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2} dt.$$

Ceci étant vrai pour tout r , on a donc montré que

$$\hat{f} \text{ est dérivable sur } I \text{ et pour tout } r > 0, \hat{f}'(r) = -\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2} dt$$

Q 8.

$$\hat{f}^{(n)}(r) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^{n+1}} dt$$

Q 9.

a) $\hat{f}(s) = \int_0^a \frac{f(t)}{t+s} dt + \int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t+s} dt$, donc par inégalité triangulaire, $|\hat{f}(s)| \leq \int_0^a \frac{|f(t)|}{t+s} dt + \int_a^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+s} dt$,

or $\frac{1}{t+s} \leq \frac{1}{s}$ dans la première intégrale et comme $s \geq 1$, $\frac{1}{t+s} \leq \frac{1}{t+1}$ dans la deuxième,

$$\text{donc } |\hat{f}(s)| \leq \frac{1}{s} \int_0^a |f(t)| dt + \int_a^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+1} dt.$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+1} dt$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+1} dt = 0$, donc il existe $a > 0$ tel que $0 \leq \int_a^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+1} dt \leq \varepsilon$.

Une fois a fixé, le quotient $\frac{1}{s} \int_0^a |f(t)| dt$ a pour limite 0 quand $s \rightarrow +\infty$, donc il existe $s_0 > 0$ tel que pour tout $s \geq s_0$, $0 \leq \frac{1}{s} \int_0^a |f(t)| dt \leq \varepsilon$.

Donc d'après l'inégalité précédente, pour tout $s \geq s_0$, $|\hat{f}(s)| \leq 2\varepsilon$.

Résumons : on a montré $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists s_0 > 0 \quad \forall s \geq s_0 \quad |\hat{f}(s)| \leq 2\varepsilon$.

$$\text{Donc } \lim_{s \rightarrow +\infty} \hat{f}(s) = 0.$$

Q 10. On veut montrer que $\lim_{s \rightarrow +\infty} s\hat{f}(s) = A$.

$s\hat{f}(s) - A = \int_0^{+\infty} f(t) \left(\frac{s}{t+s} - 1 \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-tf(t)}{s+t} dt$, donc en procédant de même, comme $\left| \frac{-t}{s+t} \right| \leq 1$, on obtient :

pour tout $a > 0$, $\left| s\widehat{f}(s) - A \right| \leq \frac{1}{s} \int_0^a t|f(t)| dt + \int_a^{+\infty} |f(t)| dt$.

Et on conclut de la même façon. Donc $\lim_{s \rightarrow +\infty} s\widehat{f}(s) = A$, autrement dit, comme $A \neq 0$, $\widehat{f}(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{s}$.

Q 11.

a) On effectue le changement de variable $u = t + s$.

b) Comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur I et que $A = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, d'après la question **Q 10**, on en déduit que

$$e^s \int_s^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{s} \text{ donc } \boxed{\int_s^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-s}}{s}}.$$

c) Quand $t \rightarrow 0$, $\frac{e^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t}$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge donc comme ce sont des fonctions positives, d'après un résultat du cours, on en déduit que $\int_s^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \int_s^1 \frac{1}{t} dt = -\ln s$.

Comme $-\ln s$ tend vers $+\infty$ et $g(s) = \int_s^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ (on ajoute une constante), on a encore $\boxed{g(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} -\ln s}$.

III.

Q 12. $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1} du$: on effectue le changement de variables $u = \frac{1}{t}$, qui est bien de classe C^1 bijectif de I dans lui-même.

$$\text{Donc } J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\alpha}}{t+1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{(1-\alpha)-1}}{t+1} dt = J(1-\alpha).$$

Q 13. $J(\alpha) = \int_I \frac{u^{\alpha-1}}{u+1} du$: on effectue le changement de variables $u = t^\beta$, lui aussi de classe C^1 bijectif de I dans I .

Q 14. Avec le changement de variables $u = \frac{1}{t}$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^{2n}} dt$, on a $K = 2n \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n-2}}{1+u^{2n}} du$.

$$\text{Donc } 2K = 2n \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^{2n}} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt, \text{ donc } K = n \int_0^{+\infty} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt.$$

Comme les exposants sont pairs, la fonction $t \mapsto \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}$ est paire, donc son intégrale sur $] -\infty, 0]$ et celle sur $[0, +\infty[$ sont les mêmes, donc $K = \frac{n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt$.

Q 15.

a) C'est du cours de MP2I : $\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

b) Les racines (simples) du polynôme $1 + X^{2n}$ sont les racines $2n$ -èmes de -1 , c'est-à-dire les ω_k pour $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$.
Donc la partie polaire associée à chaque racine est de la forme $\frac{\lambda_k}{X - \omega_k}$ où $\lambda_k = \frac{1 + \omega_k^{2n-2}}{2n\omega_k^{2n-1}}$.

$$\text{Or } \omega_k^{2n} = -1, \text{ donc } \lambda_k = \frac{1 - \frac{1}{\omega_k^2}}{-2n\frac{1}{\omega_k}} = \frac{-1}{2n} \left(\omega_k - \frac{1}{\omega_k} \right) = \frac{-1}{2n} (\omega_k - \overline{\omega_k}) = \frac{-1}{2n} 2i \sin \theta_k.$$

$$\text{Donc } \boxed{F = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{i \sin \theta_k}{X - \omega_k}}.$$

$$\text{Q 16. } F = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{i \sin \theta_k}{X - \omega_k} = \frac{-1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{i \sin \theta_k}{X - \omega_k} + \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{i \sin \theta_k}{X - \omega_k} \right).$$

Or pour $k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket$, $\omega_k = \overline{\omega_{2n-1-k}}$ et $\sin \theta_k = -\sin \theta_{2n-1-k}$ donc en posant $\ell = 2n-1-k$ dans la deuxième somme, on obtient

$$F = \frac{-1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{i \sin \theta_k}{X - \omega_k} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{-i \sin \theta_\ell}{X - \overline{\omega_\ell}} \right) = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{i \sin \theta_k}{X - \omega_k} + \frac{-i \sin \theta_k}{X - \overline{\omega_k}} \right) = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{i \sin \theta_k (\omega_k - \overline{\omega_k})}{X^2 - 2X \cos \theta_k + 1}$$

$$\text{donc } F = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{i \sin \theta_k (2i \sin \theta_k)}{X^2 - 2X \cos \theta_k + 1} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \theta_k}{X^2 - 2X \cos \theta_k + 1}.$$

Q 17. Alors $K = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \theta_k}{x^2 - 2x \cos \theta_k + 1} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x - \cos \theta_k}{\sin \theta_k}\right)^2 + 1} dx$

$$\text{donc } K = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sin \theta_k \arctan \left(\frac{x - \cos \theta_k}{\sin \theta_k} \right) \right]_{x=-\infty}^{+\infty} = \sum_{k=0}^{n-1} \pi \sin \theta_k = \pi \sum_{k=0}^{n-1} \sin \theta_k.$$

Pour conclure, il reste à calculer $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin \theta_k \right) \times \sin \frac{\pi}{2n}$: grâce à la formule de trigonométrie

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$, on obtient une somme télescopique.

$$K \times \sin \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{k\pi}{n} - \cos \frac{(k+1)\pi}{n} \right) = \frac{\pi}{2} \times (\cos 0 - \cos \pi) = \pi, \text{ d'où } \boxed{K = \frac{\pi}{\sin \left(\frac{\pi}{2n} \right)}}.$$

IV.

Q 18. $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(t+1)} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha(t+1)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(t+1)} dt$ et on effectue le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans la deuxième intégrale.

Q 19.

a) Par récurrence sur n , ou plus simplement en remarquant que $\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $-t$ pour $t \in [0, 1[$, donc que $\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k-\alpha} = \frac{1}{t^\alpha(1+t)} - \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1-\alpha}}{1+t}$, puis en intégrant sur $[0, 1[$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1-\alpha}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{t^{n+1-\alpha}}{1+t} \right| dt \leq \int_0^1 t^{n+1-\alpha} dt = \frac{1}{n+2-\alpha}.$

Donc par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1-\alpha}}{1+t} dt = 0$, i.e. la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1-\alpha}$ converge et sa somme vaut $j(\alpha)$.

Q 20. $J(\alpha) = j(\alpha) + j(1-\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-\alpha} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k-\alpha} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha}$

$$= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+\alpha} - \frac{1}{k-\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 - \alpha^2}.$$

Q 21. Soit $\alpha \in]0, 1/2]$. Alors pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k^2 - \alpha^2} \leq \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}}$

$$\text{donc } \left| J(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \right| \leq 2\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 - \alpha^2} \right| \leq 2\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\text{donc } |\alpha J(\alpha) - 1| \leq M\alpha^2 \text{ où } M \text{ est la constante } 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}}.$$

Par conséquent, par encadrement, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha J(\alpha) = 1$, i.e. $J(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\alpha}$.