

Exercice

Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses.

- a) Si f est une fonction continue sur $[1, +\infty[$ qui a pour limite 0 en $+\infty$, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- b) Si une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- c) Si f est une fonction continue sur $]0, 1]$ qui a pour limite 0 en 0, alors l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ converge.
- d) Si f est une fonction continue sur $]0, 1]$ qui a pour limite $+\infty$ en 0, alors l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ diverge.

Problème 1 - Calcul d'une série et d'une intégrale

L'objectif de ce problème est le calcul de la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt$ quand $\alpha > 1$.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. La partie 3 utilise les résultats des parties 1 et 2.

I. Intégrales et séries

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

On note, sous réserve d'existence,

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt, \quad G(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt$$

Q 1. Justifiez l'existence des intégrales $F(\alpha)$ et $G(\alpha)$.

Q 2.

- a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculez $u_n(\alpha) = (-1)^n \int_0^1 t^{\alpha n} dt$. Puis montrez que la série $\sum_{n \geq 0} u_n(\alpha)$ converge.
- b) Montrez que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2 n^2 - 1}$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?

Q 3.

- a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(\alpha) = \sum_{k=0}^n u_k(\alpha) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha} dt$.
- b) Montrez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha} dt = 0$. Déduisez-en l'égalité

$$F(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}$$

Q 4.

- a) En effectuant le changement de variable $u = t^{1-\alpha}$ et en le justifiant soigneusement, montrez l'égalité

$$G(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} F\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

- b) Montrez l'égalité

$$G(\alpha) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j\alpha - 1}$$

Q 5. Pourquoi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt$ converge-t-elle ? Justifiez ensuite l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha^2 k^2 - 1}$$

II. Trigonométrie et intégrales

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Soit $z \in \mathbb{C} - \{0, 1, -1\}$. Justifiez l'égalité

$$\sum_{k=-n}^{+n} z^{2k} = \frac{z^{2n+1} - \frac{1}{z^{2n+1}}}{z - \frac{1}{z}}$$

b) Déduisez-en, pour $x \in]0, \pi]$, que

$$\sum_{k=-n}^{+n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

Q 7. Soit $x \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez que

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

Q 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrez que $J_n = \int_0^\pi \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} dx$ converge et donnez sa valeur.

III. Calcul d'une intégrale

Dans cette partie, a désigne un réel compris strictement entre 0 et 1.

On pose $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie de la façon suivante : $\varphi(0) = 0$ et si $x \in]0, \pi]$, $\varphi(x) = \frac{\cos(ax) - 1}{2 \sin \frac{x}{2}}$

Q 9. Montrez que φ est continue sur $[0, \pi]$, puis qu'elle est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

Q 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx$. Grâce à une intégration par parties que vous justifierez soigneusement, montrez que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \int_0^\pi \cos(ax) \cos(nx) dx$.

Q 11.

a) Montrez que $v_n = \frac{(-1)^n a \sin(\pi a)}{a^2 - n^2}$.

b) Montrez que $\sum_{k=1}^n v_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + I_n + J_n$.

Q 12. Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge et donnez la valeur de sa somme en fonction de a .

Q 13. Montrez que pour tout $\alpha > 1$, l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}$$

Exercice

- a) Faux : la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et a pour limite 0 en $+\infty$ et pourtant l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ diverge.
- b) Vrai : la suite des sommes partielles $(s_n) = \left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$ converge vers une limite ℓ , donc la suite $(s_{n-1})_{n \geq 1}$ converge aussi vers ℓ , donc $(u_n)_{n \geq 1} = (s_n - s_{n-1})_{n \geq 1}$ converge vers $\ell - \ell = 0$.
- c) Vrai : on peut prolonger par continuité la fonction f en 0 en posant $f(0) = 0$, f devient alors continue sur le segment $[0, 1]$ et donc son intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ est parfaitement définie.
- d) Faux : la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$ et a pour limite $+\infty$ en 0 et pourtant l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

Problème 1

I.

Q 1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc en particulier sur $[0, 1]$: l'intégrale $F(\alpha)$ est donc une intégrale normale d'une fonction continue sur un segment.

Pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{1+t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$, or $\alpha > 1$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge, donc par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $G(\alpha)$ converge.

Q 2.

a) $u_n(\alpha) = (-1)^n \int_0^1 t^{\alpha n} dt = (-1)^n \left[\frac{1}{\alpha n + 1} t^{\alpha n + 1} \right]_0^1 = \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}.$

La suite de terme général $\frac{1}{\alpha n + 1}$ est positive, décroissante et converge vers 0, donc d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 0} u_n(\alpha)$ converge.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2 n^2 - 1} \right| \leq \frac{1}{\alpha^2 n^2 - 1}$ et $\frac{1}{\alpha^2 n^2 - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha^2 n^2}$, or la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\alpha^2 n^2}$ converge (puisque l'exposant de n est strictement supérieur à 1) donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2 n^2 - 1}$ est absolument convergente, donc convergente.

Q 3.

a) $\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t^\alpha)^k dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^\alpha)^{n+1}}{1 - (-t^\alpha)} dt$ (somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison différente de 1).

Donc $\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt - \int_0^1 \frac{(-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha} dt = F(\alpha) - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha} dt = F(\alpha) - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha} dt.$

Donc $F(\alpha) = \sum_{k=0}^n u_k(\alpha) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha} dt.$

b) Plusieurs façons de faire : la plus simple est un encadrement.

Pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha} \leq t^{\alpha(n+1)}$ donc $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha} dt \leq \int_0^1 t^{\alpha(n+1)} dt = \frac{1}{(n+1)\alpha + 1}.$

D'après le th. d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha} dt = 0.$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha} dt = 0$ (produit d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0).

On sait aussi que la série $\sum_{n \geq 0} u_n(\alpha)$ converge, autrement dit ses sommes partielles convergent vers la somme de la

série, donc par passage à la limite dans l'égalité **Q 3a**, on en déduit que $F(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}$.

Q 4.

- a) Comme $1 - \alpha < 0$, la fonction $t \mapsto t^{1-\alpha}$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, strictement décroissante et réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans $]0, 1]$, donc d'après le th. de changement de variables dans les intégrales généralisées, on a en posant $u = t^{1-\alpha}$ donc $t = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ et $dt = \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{1}{1-\alpha}-1} du$:

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= \int_1^0 \frac{1}{1 + u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \times \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{1}{1-\alpha}-1} du \\ &= \frac{1}{\alpha-1} \int_0^1 \frac{u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1 + u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} du \\ &= \frac{1}{\alpha-1} \int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} + 1} du \\ &= \frac{1}{\alpha-1} \int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + 1} du \\ &= \frac{1}{\alpha-1} F\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) \end{aligned}$$

- b) D'après la question **Q 3**, $F(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}$ et donc en remplaçant α par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ (qui est aussi strictement plus grand que 1), on a aussi $F\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\frac{\alpha}{\alpha-1} + 1} = (\alpha-1) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha - 1} = (\alpha-1) \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j\alpha - 1}$

$$\text{Donc } G(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} F\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j\alpha - 1}.$$

- Q 5.** Les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt$ et $\int_1^{1+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt$ convergent, donc par définition, comme $t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt$ converge et elle vaut $\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt + \int_1^{1+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt = F(\alpha) + G(\alpha)$.

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j\alpha + 1} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j\alpha - 1} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j\alpha + 1} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j\alpha - 1} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \left(\frac{1}{j\alpha + 1} - \frac{1}{j\alpha - 1} \right) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \frac{-2}{j^2 \alpha^2 - 1} \\ &= 1 + 2 \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{\alpha^2 j^2 - 1} \end{aligned}$$

II.

Q 6.

- a) $\sum_{k=-n}^{+n} z^{2k} = z^{-2n} \sum_{k=-n}^{+n} z^{2k+2n} = z^{-2n} \sum_{k=-n}^{+n} (z^2)^{k+n} = z^{-2n} \sum_{j=0}^{+2n} (z^2)^j = z^{-2n} \frac{1 - (z^2)^{2n+1}}{1 - z^2}$ (somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $z^2 \neq 1$)

$$\text{donc } \sum_{k=-n}^{+n} z^{2k} = \frac{\frac{1}{z^{2n}} - z^{2n+2}}{1 - z^2} = \frac{\frac{1}{z^{2n+1}} - z^{2n+1}}{\frac{1}{z} - z} = \frac{z^{2n+1} - \frac{1}{z^{2n+1}}}{z - \frac{1}{z}}$$

- b) On utilise le résultat de la question **Q 6 a** en posant $z = e^{ix/2}$ (remarque : comme $x \in]0, \pi]$, on a bien z différent de 0, 1 et -1).

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{+n} z^{2k} &= \frac{(e^{ix/2})^{2n+1} - \frac{1}{(e^{ix/2})^{2n+1}}}{e^{ix/2} - \frac{1}{e^{ix/2}}} \\ &= \frac{e^{i(2n+1)\frac{x}{2}} - e^{-i(2n+1)\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{2i \sin((2n+1)\frac{x}{2})}{2i \sin(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Q 7. On utilise le résultat de la question **Q 6 b** :

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{+n} e^{ikx} &= \sum_{k=-n}^{-1} e^{ikx} + 1 + \sum_{k=1}^{+n} e^{ikx} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+n} e^{i(-k)x} + \sum_{k=1}^{+n} e^{ikx} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+n} (e^{-ikx} + e^{ikx}) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+n} 2 \cos(kx) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{+n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

- Q 8.** La fonction $x \mapsto \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$ est continue sur $]0, \pi]$ et est prolongeable par continuité en 0 en lui donnant la valeur $\frac{2n+1}{2}$. Donc l'intégrale J_n converge (fausse singularité en 0).

$$\text{D'après Q 7, } J_n = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right) dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} dx + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kx) dx = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_{x=0}^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

III.

- Q 9.** Sur $]0, \pi]$, φ est le quotient de deux fonctions de classe C^1 donc elle est de classe C^1 .

On peut noter que φ est continue en 0, car $\cos(ax) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-(ax)^2}{2}$ et $2 \sin \frac{x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{a^2}{2}x$.

Enfin, pour tout $x \in]0, \pi]$, $\varphi'(x) = \frac{1}{2} \frac{(-a \sin(ax)) \sin \frac{x}{2} - (\cos(ax) - 1) \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}}{(\sin \frac{x}{2})^2}$.

Grâce à quelques d.l. en 0 à l'ordre 2, on peut calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x)$:

$$\sin(ax) = ax + o(x^2), \sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x^2) \text{ donc } (-a \sin(ax)) \sin \frac{x}{2} = \frac{-a^2 x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos(ax) - 1 = \frac{-a^2 x^2}{2} + o(x^2), \cos \frac{x}{2} = 1 - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \text{ donc } (\cos(ax) - 1) \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{-a^2 x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{donc le numérateur } (-a \sin(ax)) \sin \frac{x}{2} - (\cos(ax) - 1) \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \text{ a pour d.l. } -\frac{a^2}{4}x^2 + o(x^2)$$

or le dénominateur $(\sin \frac{x}{2})^2$ est équivalent à $\frac{x^2}{4}$ donc le quotient $\varphi'(x)$ a pour limite $-\frac{a^2}{2}$ quand $x \rightarrow 0$.

On résume : φ est continue sur le segment $[0, \pi]$, est de classe C^1 sur $]0, \pi]$ et sa dérivée possède une limite réelle en 0, donc d'après le th. de limite de la dérivée (= th. de prolongement C^1), φ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

Tout ça, c'est du programme de Première Année !

Q 10. $I_n = \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx = \int_0^\pi \varphi(x) \psi'(x) dx$ en posant $\psi(x) = -\frac{2}{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)$.

D'après la question précédente, φ est de classe C^1 sur $(0, \pi]$, tout comme ψ : on peut donc intégrer par parties.

$$I_n = \left[\varphi(x) \psi(x) \right]_{x=0}^\pi - \int_0^\pi \varphi'(x) \psi(x) dx = \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi \varphi'(x) \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx.$$

Donc par inégalité triangulaire, $|I_n| \leq \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi |\varphi'(x)| \cdot \left| \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \right| dx \leq \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi |\varphi'(x)| dx = \frac{K}{2n+1}$ où K est une constante indépendante de n .

Par encadrement, on en déduit que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Q 11.

a) $\cos(ax) \cos(nx) = \frac{1}{2} (\cos((a+n)x) + \cos((a-n)x))$ donc comme $a+n \neq 0$ et $a-n \neq 0$,

$$v_n = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((a+n)x)}{a+n} + \frac{\sin((a-n)x)}{a-n} \right]_{x=0}^\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((a+n)\pi)}{a+n} + \frac{\sin((a-n)\pi)}{a-n} \right)$$

or $\sin(t+n\pi) = \sin(t-n\pi) = (-1)^n \sin t$ donc $v_n = \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{\sin(\pi a)}{a+n} + \frac{\sin(\pi a)}{a-n} \right) = \frac{(-1)^n a \sin(\pi a)}{a^2 - n^2}$.

b) $\sum_{k=1}^n v_k = \int_0^\pi \cos(ax) \sum_{k=1}^n \cos(kx) dx = \int_0^\pi \cos(ax) \left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \right) dx$ d'après la partie précédente.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sum_{k=1}^n v_k &= \int_0^\pi \cos(ax) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(ax) dx \\ &= \int_0^\pi (\cos(ax) - 1) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} dx + \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} dx - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(ax)}{a} \right]_{x=0}^\pi = I_n + J_n - \frac{\sin(\pi a)}{2a} \end{aligned}$$

Q 12. On sait que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et que $J_n = \frac{\pi}{2}$ donc $\sum_{k=1}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$.

Autrement dit la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$.

Q 13. Soit $\alpha > 1$, on pose $a = \frac{1}{\alpha} \in]0, 1]$: on peut donc utiliser les résultats précédents.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \frac{1}{\alpha} \sin(\frac{\pi}{\alpha})}{(\frac{1}{\alpha})^2 - n^2} \text{ donc } \frac{1}{\alpha} \sin(\frac{\pi}{\alpha}) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(\frac{1}{\alpha})^2 - n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})}{2}$$

$$\text{donc } \alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha}) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 - \alpha^2 n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})}{2} \text{ donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2 n^2 - 1} = \frac{\pi}{2\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})} - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Or } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2 n^2 - 1}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha} dt = 1 + 2 \left(\frac{\pi}{2\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})}$$