

## Problème 1 - Algèbre linéaire

Dans un espace vectoriel  $E$ , si  $f$  est un endomorphisme et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , on dit que  $F$  est stable par  $f$  quand pour tout  $x \in F$ ,  $f(x) \in F$ .

### I. Un exemple

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}} f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

- Q 1.** Déterminez le réel  $\alpha$  tel que  $f^4 = \alpha \text{Id}_E$ .
- Q 2.** Montrez que  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  et  $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$  sont deux droites vectorielles dont vous préciserez un vecteur directeur.
- Q 3.** Déterminez une base de  $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ .
- Q 4.** Montrez que  $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ .

### II. Étude du cas général

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^4 = \text{Id}_E$ .

- Q 5.** Montrez que  $F = \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$  et  $G = \text{Ker}(f^2 - \text{Id}_E)$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , stables par  $f$ .
- Q 6.** Montrez que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .
- Q 7.** Montrez que  $U = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  et  $V = \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $G$ , supplémentaires dans  $G$ .
- Q 8.** Montrez que  $E = U \oplus V \oplus F$ .
- Q 9.** Montrez que  $F$  est de dimension paire : on pourra considérer l'endomorphisme induit par  $f$  dans  $F$  et calculer son déterminant.

## Problème 2 - Étude d'opérateurs

Dans un espace vectoriel normé, un **opérateur** est un **endomorphisme continu**.

### I. Norme subordonnée d'un opérateur

Dans cette partie, très proche du cours, il est demandé de n'utiliser aucun résultat du cours, mais au contraire de tout redémontrer.

Dans cette partie,  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\| \cdot \|$  une norme sur  $E$ . Pour  $a \in E$  et  $r > 0$ , on note  $B'(a, r)$  la boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$  :

$$B'(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$$

Soit  $T$  un opérateur de  $E$ .

- Q 1.** Montrez qu'il existe  $r > 0$  tel que l'application  $T$  est bornée sur  $B'(0, r)$ . On pose alors  $M = \sup_{x \in B'(0, r)} \|T(x)\|$ .

**Q 2.**

- a) Soit  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ . Quelle est la norme de  $r \frac{x}{\|x\|}$  ?
- b) Montrez que pour tout  $x \in E$ ,  $\|T(x)\| \leq \frac{M}{r} \|x\|$ .

On a donc montré le résultat suivant (appelée proposition (\*)) :

pour tout  $T \in \mathcal{L}(E)$ , si  $T$  est continu sur  $E$ , alors il existe  $K \geq 0$  telle que pour tout  $x \in E$ ,  $\|T(x)\| \leq K \|x\|$ .

- Q 3.** Montrez que la réciproque est vraie.

Dans toute la suite de cette partie,  $T$  est un opérateur de  $E$ . On appelle norme subordonnée de  $T$  le plus petit réel  $K$  qui convient dans la proposition (\*). On la note  $\|T\|$ . Bien sûr la norme subordonnée dépend de la norme sur  $E$ .

**Q 4.** Montrez que si  $K$  est une constante qui convient dans la proposition (\*) et s'il existe  $y \in E$  tel que  $y \neq 0$  et  $\|T(y)\| = K \|y\|$ , alors  $K$  est la norme subordonnée de  $T$ .

**Q 5.** Montrez que si  $K$  est une constante qui convient dans la proposition (\*) et s'il existe une suite  $(x_n) \in (E - \{0\})^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} = K$ , alors  $K$  est la norme subordonnée de  $T$ .

La suite du sujet est consacrée à l'étude de quelques exemples.

## II. Un premier exemple

Dans cette partie,  $n$  est un entier naturel au moins égal à 2,  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Pour  $P \in E$ , on pose  $f(P) = P(X+1) + P(X)$ .

Pour  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ , on pose  $\|P\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$  et  $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|$ .

On admet que  $\|\cdot\|_{\infty}$  et  $\|\cdot\|_1$  sont des normes sur  $E$ .

**Q 6.** Justifiez rapidement que  $f$  est bien un opérateur sur  $E$ , que ce soit pour la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  ou pour la norme  $\|\cdot\|_1$ .

- Q 7.**
- Montrez que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\|f(X^k)\|_1 \leq 1 + 2^n$ .
  - Déduisez-en que pour tout  $P \in E$ ,  $\|f(P)\|_1 \leq (1 + 2^n) \|P\|_1$ .
  - Montrez que la norme subordonnée de  $f$ , relativement à la norme  $\|\cdot\|_1$ , est égale à  $1 + 2^n$ .
- Q 8.** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $q = \lfloor n/2 \rfloor$ .
- Montrez que la suite finie  $\left( \binom{p}{k} \right)_{0 \leq k \leq q}$  est croissante.
  - Justifiez que  $\binom{p}{q} = \max_{0 \leq k \leq p} \binom{p}{k}$ .
  - Montrez que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $\sum_{i=k}^p \binom{i}{k} = \binom{p+1}{k+1}$ .
  - On pose  $s = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ . Montrez que la norme subordonnée de  $f$ , relativement à la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$ , est égale à  $1 + \binom{n+1}{s}$ .

## III. Un deuxième exemple

Dans cette partie,  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $f \in E$ , on pose  $T(f) : x \mapsto f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right)$ .

**Q 9.** Pour  $f \in E$ , on pose  $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ .

- Justifiez que la notation  $\|f\|_{\infty}$  désigne bien un réel.
- Montrez que  $\|\cdot\|_{\infty}$  est une norme sur  $E$ .

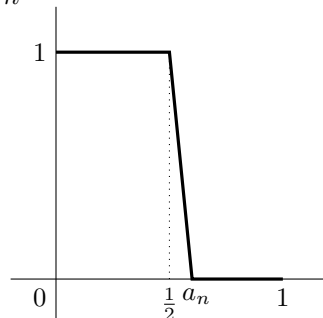
**Q 10.**

- Montrez que  $T$  est un opérateur sur  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$ .
- Montrez que  $\|T\|_{\infty} = 2$  (norme subordonnée associée à la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$ ).

**Q 11.** Pour  $f \in E$ , on pose  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ . Montrez que  $\|\cdot\|_1$  est une norme sur  $E$ .

**Q 12.** Montrez que  $T$  est un opérateur sur  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$ .

**Q 13.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , on pose  $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$  et  $f_n$  la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :



- Pour  $x \in [0, 1]$ , donnez une expression de  $f_n(x)$  en fonction de  $x$ .
- Calculez  $\|T(f_n)\|_1$  et  $\|f_n\|_1$ . Déduisez-en que  $\|T\|_1 = 3$ .

## Problème 1

### I.

**Q 1.** Simple calcul de  $A^4 : \alpha = 1$ .

**Q 2.** On pose  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} : v \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \iff f(v) = v \iff \begin{cases} 3x + 2z = x \\ y - 2t = y \\ -4x - 3z = z \\ y - t = t \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

Donc  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  est la droite vectorielle dirigée par le vecteur  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ . De même,  $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$  est la droite

vectorielle dirigée par le vecteur  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ .

**Q 3.**  $\text{mat}_{\mathcal{B}} f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  donc de même,  $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$  est un plan vectoriel dont une base est  $(v_3, v_4)$  où

$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  et  $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ .

**Q 4.**  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) + \text{Ker}(f + \text{Id}_E) + \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) = \text{vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$  donc  $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$  si et seulement si la famille  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  est une base de  $E$ .

Or  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est de déterminant 1, donc  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  est une base de  $E$ , ce qui conclut la question.

### II.

**Q 5.**  $F$  et  $G$  sont des noyaux d'applications linéaires donc ce sont des s.e.v. de  $E$ .

De plus, pour tout  $v \in F$ ,  $f^2(v) = -v$  donc  $f^3(v) = f(-v)$  donc  $f^2(f(v)) = -f(v)$ , ce qui prouve que  $f(v) \in F$ . Donc  $F$  est stable par  $f$ . De même pour  $G$ .

**Q 6.**  $f^2$  vérifie  $(f^2)^2 = \text{Id}_E$  donc  $f^2$  est une symétrie, donc d'après le cours de MP2I,  $F$  et  $G$  sont deux s.e.v. supplémentaires.

**Q 7.** Là encore,  $U$  et  $V$  sont deux s.e.v. de  $E$  (noyaux) et il est facile de montrer qu'ils sont inclus dans  $G$ , je ne détaille pas.

De plus, si  $x \in U \cap V$ , alors  $f(x) = x$  et  $f(x) = -x$  donc  $x = 0$  :  $U$  et  $V$  sont en somme directe.

Il reste à montrer que  $G = U + V$ , i.e. tout vecteur  $x$  de  $G$  peut s'écrire  $y + z$  où  $y \in U$  et  $z \in V$ . On procède par analyse-synthèse.

Analyse : soit  $x \in G$ , on suppose que  $x = y + z$  où  $y \in U$  et  $z \in V$ . Donc  $f(y) = y$  et  $f(z) = -z$ . Donc en appliquant  $f$  à l'égalité  $x = y + z$ , on obtient  $f(x) = y - z$ . D'où on tire  $y = \frac{1}{2}(x + f(x))$  et  $z = \frac{1}{2}(x - f(x))$ .

Synthèse : soit  $x \in G$ , on pose  $y = \frac{1}{2}(x + f(x))$  et  $z = \frac{1}{2}(x - f(x))$ . Il est évident que  $x = y + z$ . De plus,  $f(y) = \frac{1}{2}(f(x) + f^2(x))$ , or  $x \in G$  donc  $f^2(x) = x$ , donc il vient  $f(y) = y$ , donc  $y \in U$ . Et de même,  $f(z) = \frac{1}{2}(f(x) - f^2(x)) = \frac{1}{2}(f(x) - x) = -z$  donc  $z \in V$ .

Ceci prouve donc que tout vecteur  $x$  de  $G$  peut s'écrire  $y + z$  où  $y \in U$  et  $z \in V$ . Donc  $G = U + V$ .

Au total,  $G = U \oplus V$ .

**Q 8.**  $E = G \oplus F$  et  $G = U \oplus V$  d'où la conclusion  $E = U \oplus V \oplus F$ .

**Q 9.**  $F$  est stable par  $f$  donc on peut considérer l'endomorphisme  $h$  induit par  $f$  dans  $F$ . Par définition de  $F$ , il vérifie  $h^2 = -\text{Id}_F$  donc  $\det(h)^2 = \det(h^2) = \det(-\text{Id}_F) = (-1)^p$  où  $p$  est la dimension de  $F$  :  $(-1)^p = (\det h)^2$  est donc un réel positif, donc  $p$  est pair.

## Problème 2

### I.

**Q 1.**  $T$  est continue en 0 donc  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall x \in E \quad \|x - 0\| \leq r \Rightarrow \|T(x) - T(0)\| \leq \varepsilon$ .  
En spécialisant  $\varepsilon$  par une valeur particulière (par exemple 42), on montre donc l'existence d'un réel  $r > 0$  tel que pour tout  $x \in B'(0, r)$ ,  $\|T(x)\| \leq 42$ .  
Donc  $T$  est borné sur  $B'(0, r)$ .

**Q 2.**

a) Pour  $x \neq 0$ ,  $\left\| r \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left| r \frac{1}{\|x\|} \right| \|x\|$  par homogénéité de la norme. Donc  $\left\| r \frac{x}{\|x\|} \right\| = r \frac{1}{\|x\|} \|x\| = r$

b) Soit  $x \in E$ . Si  $x \neq 0$ , alors d'après ce qui précède,  $r \frac{x}{\|x\|} \in B'(0, r)$ , donc  $\left\| T \left( r \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq M$ .

Par linéarité de  $T$  puis homogénéité de la norme, on obtient  $\left\| T \left( r \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \left\| \frac{r}{\|x\|} T(x) \right\| = \left| \frac{r}{\|x\|} \right| \|T(x)\| = \frac{r}{\|x\|} \|T(x)\| \leq M$ . Donc il vient  $\|T(x)\| \leq \frac{M}{r} \|x\|$ . Et ce résultat est encore vrai quand  $x = 0$ .

**Q 3.** S'il existe  $K \geq 0$  telle que pour tout  $x \in E$ ,  $\|T(x)\| \leq K \|x\|$ , alors pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\|T(x - y)\| \leq K \|x - y\|$ . Par linéarité de  $T$ , on obtient  $\|T(x) - T(y)\| \leq K \|x - y\|$ , ce qui signifie que  $T$  est une application  $K$ -lipschitzienne, donc elle est continue sur  $E$ .

**Q 4.** Par l'absurde, on suppose qu'il existe une constante  $L < K$  telle que pour tout  $x \in E$ ,  $\|T(x)\| \leq L \|x\|$ . En spécialisant  $x \leftarrow y$ , on obtient  $\|T(y)\| = K \|y\| \leq L \|y\|$ , donc comme  $y \neq 0$ , on a  $\|y\| > 0$  donc par division par un réel strictement positif, on a  $K \leq L$  : contradiction.  
Donc il n'existe pas de constante plus petite que  $K$  qui satisfait la proposition (\*), autrement dit  $K$  est la norme subordonnée de  $T$ .

**Q 5.** Par l'absurde, on suppose qu'il existe une constante  $L < K$  telle que pour tout  $x \in E$ ,  $\|T(x)\| \leq L \|x\|$ . En spécialisant  $x \leftarrow x_n$ , on obtient : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|T(x_n)\| \leq L \|x_n\|$ , donc comme  $x \neq 0$ , on a  $\|x_n\| > 0$  donc par division par un réel strictement positif, on a : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} \leq L$ . Par passage à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on en déduit que  $K \leq L$  : contradiction.  
Donc il n'existe pas de constante plus petite que  $K$  qui satisfait la proposition (\*), autrement dit  $K$  est la norme subordonnée de  $T$ .

### II.

**Q 6.** L'application  $f$  est linéaire et l'espace  $E$  est de dimension finie, donc d'après le cours,  $f$  est continue pour toute norme.

**Q 7.**

a) Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$f(X^k) = (X + 1)^k + X^k = 2X^k + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j, \text{ donc } \|f(X^k)\|_1 = 2 + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} = 1 + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} = 1 + 2^k \leq 1 + 2^n.$$

b) Soit  $P \in E$ . On écrit  $P$  sous sa forme habituelle :  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ . Alors  $f(P) = \sum_{i=0}^n a_i f(X^i)$ .

$$\text{Donc } \|f(P)\|_1 \leq \sum_{i=0}^n |a_i| \|f(X^i)\|_1 \leq \sum_{i=0}^n |a_i| (1 + 2^n) = (1 + 2^n) \sum_{i=0}^n |a_i| = (1 + 2^n) \|P\|_1.$$

c) Dans l'inégalité précédente, il y a égalité pour  $P = X^n$ , donc la norme subordonnée de  $f$ , relativement à la norme  $\|\cdot\|_1$ , est égale à  $1 + 2^n$ .

**Q 8.**

- a) Soit  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ . On montre que  $\binom{p}{k-1} \leq \binom{p}{k}$  par équivalences successives :

$$\begin{aligned} \binom{p}{k-1} \leq \binom{p}{k} &\iff \frac{p!}{(k-1)!(p-k+1)!} \leq \frac{p!}{k!(p-k)!} \iff \frac{k!}{(k-1)!} \leq \frac{(p-k+1)!}{(p-k)!} \\ &\iff k \leq p-k+1 \iff k \leq \frac{p+1}{2}, \text{ ce qui est vrai car } k \leq q \leq \frac{p+1}{2}. \end{aligned}$$

On a donc montré  $\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket \quad \binom{p}{k-1} \leq \binom{p}{k}$  : la suite finie  $\left(\binom{p}{k}\right)_{0 \leq k \leq q}$  est croissante.

- b) Par propriété de symétrie des coefficients binomiaux, pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $\binom{p}{k} = \binom{p}{p-k}$  donc d'après la question précédente, la suite finie  $\left(\binom{p}{k}\right)_{0 \leq k \leq p}$  est croissante jusqu'au rang  $q$ , puis décroissante. Sa valeur maximale est donc atteinte en  $q$ .

- c) Par récurrence sur  $p$ .

- d) Soit  $P \in E : P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } f(P) &= \sum_{i=0}^n a_i f(X^i) = \sum_{i=0}^n a_i (X^i + (X+1)^i) = \sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{i=0}^n a_i \left( \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} X^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} a_i \right) X^k = \sum_{k=0}^n \left( a_k + \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} a_i \right) X^k. \text{ Donc } \|f(P)\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} \left| a_k + \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} a_i \right|. \\ \text{Or pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \left| a_k + \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} a_i \right| &\leq |a_k| + \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} |a_i| \leq \left( 1 + \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} \right) \|P\|_\infty = \left( 1 + \binom{n+1}{k+1} \right) \|P\|_\infty. \end{aligned}$$

Grâce à la question **b**, on a donc pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\left| a_k + \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} a_i \right| \leq \left( 1 + \binom{n+1}{s} \right) \|P\|_\infty$ .

Donc  $\|f(P)\|_\infty \leq \left( 1 + \binom{n+1}{s} \right) \|P\|_\infty$ , avec égalité si  $P = 1 + X + \dots + X^n$ .

Donc la norme subordonnée de  $f$ , relativement à la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , est égale à  $1 + \binom{n+1}{s}$ .

### III.

#### Q 9.

- a) Pour  $f \in E$ ,  $f$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ , qui est un compact, donc d'après le th. des bornes atteintes,  $f$  est bornée sur  $[0, 1]$ , ce qui justifie l'existence dans  $\mathbb{R}$  du symbole  $\|f\|_\infty$ .
- b) Question de cours ! Je la refais entièrement !
- Soit  $f \in E$  tel que  $\|f\|_\infty = 0$ , alors pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $0 \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty = 0$  donc pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $f(t) = 0$  :  $f$  est donc la fonction nulle.
  - Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f \in E$ , la multiplication par le réel positif  $\lambda$  est croissante donc elle conserve les inégalités donc en particulier les maximums et les bornes supérieures :  

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda f(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda| \cdot |f(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| = |\lambda| \|f\|_\infty.$$
  - Soit  $(f, g) \in E^2$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $|(f+g)(t)| = |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ . Ceci prouve donc que  $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$  est un majorant de la fonction  $|f+g|$  sur  $[0, 1]$ . Comme  $\|f+g\|_\infty$  est le plus petit des majorants de cette fonction, on en déduit que  $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ .

#### Q 10.

- a) Il est clair que  $T$  est bien un endomorphisme de  $E$ .

$$\text{Pour tout } x \in [0, 1], |T(f)(x)| = \left| f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) \right| \leq |f(x)| + \left| f\left(\frac{x}{2}\right) \right| \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty.$$

D'après la partie I,  $T$  est donc un opérateur sur  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

- b) On remarque que si  $f$  est la fonction constante égale à 1, alors dans l'inégalité précédente, il y a en fait égalité. D'après la question 4 de la partie I, on en déduit que la norme subordonnée de  $T$  (pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ) est égale à 2.

#### Q 11. Et rebelote !

- Soit  $f \in E$  tel que  $\|f\|_1 = 0$ , alors  $\int_0^1 |f(t)| dt = 0$ , or  $|f|$  est une fonction positive et continue sur  $[0, 1]$  donc d'après le th. de stricte positivité de l'intégrale,  $f$  est la fonction nulle.
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f \in E$ ,  $\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda f(t)| dt = \int_0^1 |\lambda| \cdot |f(t)| dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)| dt = |\lambda| \|f\|_1$  par linéarité de l'intégrale.
- Soit  $(f, g) \in E^2$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $|(f + g)(t)| = |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$ , donc par croissance de l'intégrale,  $\int_0^1 |(f + g)(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |g(t)| dt$ , autrement dit  $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ .

**Q 12.** On a déjà signalé que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

$$\text{Pour tout } f \in E, \|T(f)\|_1 = \int_0^1 \left| f(t) + f\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt \leq \int_0^1 \left( |f(t)| + \left| f\left(\frac{t}{2}\right) \right| \right) dt = \|f\|_1 + \int_0^1 \left| f\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt.$$

$$\text{Par changement de variable } t = 2x, \text{ on obtient } \|T(f)\|_1 \leq \|f\|_1 + 2 \int_0^{1/2} |f(x)| dx \leq \|f\|_1 + 2 \int_0^1 |f(x)| dx = 3 \|f\|_1.$$

D'après la partie I,  $T$  est un opérateur pour la norme  $\|\cdot\|_1$ .

**Q 13.**

a) Si  $x \in [0, 1/2]$ ,  $f_n(x) = 1$ ; si  $x \in [1/2, a_n]$ ,  $f_n(x) = n(x - a_n) = nx - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ ; si  $x \in [a_n, 1]$ ,  $f_n(x) = 0$

b)  $\|f_n\|_1$  est l'aire sous la courbe de  $f_n$  (un rectangle uni à un triangle) :  $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ .

$$\|T(f_n)\|_1 \text{ est l'aire sous la courbe de } T(f_n), \text{ or } x \mapsto f_n(x/2) \text{ est la fonction constante égale à } 1 \text{ donc } \|T(f_n)\|_1 = \|f_n\|_1 + 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Le rapport  $\frac{\|T(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1}$  tend vers 3 quand  $n \rightarrow +\infty$ , donc d'après l'inégalité prouvée en question 9 et le résultat de la question 5 de la partie I, on en déduit que la norme subordonnée de  $T$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$  est égale à 3.