Td 4

1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E.

Montrer qu'il existe un automorphisme g et un projecteur p tel que $f = g \circ p$.

2) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) \mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

3) On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$.

On suppose que F est un hyperplan stable par multiplication. On souhaite montrer par l'absurde que $I_n \in F$.

On suppose que $I_n \notin F$, et on note p la projection sur $\mathrm{vect}(I_n)$ parallèlement à F.

a) Montrer que : $\forall M, M' \in E,\ p(M).p(M') = p(MM')$.
b) En déduire que : $\forall M \in E, (M^2 \in F \Rightarrow M \in F)$.
c) Établir que F contient la base canonique de E.
d) Conclure.

4) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists!\, a_n > 0 : f_n(a_n) = 0$.
b) Étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et calculer sa limite.
c) La série $\sum a_n$ converge-t-elle ?
d) Étudier la série $\displaystyle\sum n^\alpha \left(a_n - \frac{2}{n^2}\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

5) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer f'.
b) Déterminer $\lim\limits_{0^+} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

Td 4

1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E.

Montrer qu'il existe un automorphisme g et un projecteur p tel que $f = g \circ p$.

2) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) \mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

3) On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$.

On suppose que F est un hyperplan stable par multiplication. On souhaite montrer par l'absurde que $I_n \in F$.

On suppose que $I_n \notin F$, et on note p la projection sur $\mathrm{vect}(I_n)$ parallèlement à F.

a) Montrer que : $\forall M, M' \in E,\ p(M).p(M') = p(MM')$.
b) En déduire que : $\forall M \in E, (M^2 \in F \Rightarrow M \in F)$.
c) Établir que F contient la base canonique de E.
d) Conclure.

4) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists!\, a_n > 0 : f_n(a_n) = 0$.
b) Étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et calculer sa limite.
c) La série $\sum a_n$ converge-t-elle ?
d) Étudier la série $\displaystyle\sum n^\alpha \left(a_n - \frac{2}{n^2}\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

5) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer f'.
b) Déterminer $\lim\limits_{0^+} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.