

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x > 0$, $f(x+1) = xf(x)$ et $f''(x) > 0$.

Q 1. Montrer qu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. En déduire le signe de f' et les variations de f .

Q 2. Déterminer $\lim_{+\infty} f$.

Q 3. Montrer que f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser le signe de f .

Q 4. Les intégrales $\int_1^{+\infty} f$, $\int_0^1 f$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{f}$ convergent-elles ?

Exercice hebdomadaire 4 - Corrigé

Q 1. f est de classe C^2 sur $[1, 2]$ et $f(2) = 1 \times f(1) = f(1)$ donc d'après le th. de Rolle, il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Comme $f'' > 0$, alors f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $]0, \alpha[$, $f' < 0$ et sur $]\alpha, +\infty[$, $f' > 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

Q 2. Pour $x \geq 2$, $f'(x) \geq f'(2)$ car f' est croissante sur $[2, +\infty[\subset]\alpha, +\infty[$. Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x \geq 2$, $f(x) - f(2) \geq f'(2) \cdot (x - 2)$. Comme $f'(2) > 0$, on a donc par encadrement $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Q 3. Si f s'annule en un point $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors $f(a+1) = af(a) = 0$, puis $f(a+2) = (a+1)f(a+1) = 0$, puis de même $f(a+3) = 0$. Or $a+3 > a+2 > 2$ et f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$ donc $0 = f(a+3) > f(a+2) = 0$: contradiction.

La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'y annule pas, donc d'après le th. des valeurs intermédiaires, f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$. Et comme sa limite en $+\infty$ est $+\infty$, on en déduit que f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q 4. $\lim_{+\infty} f = +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} f$ diverge (on pourrait dire grossièrement).

Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{f(x+1)}{x}$ et f est continue en 1 donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = f(1) > 0$, donc $f(x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f(1)$, donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{f(1)}{x}$. Or $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ diverge, donc par comparaison de fonctions positives, $\int_0^1 f$ diverge.

On a alors aussi $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $\int_0^1 \frac{1}{f}$ converge (fausse singularité en 0).

On a montré en question 2 que, en posant $k = f'(2) > 0$, pour $x > 2$, $f(x) \geq f(2) + k(x-2) \geq k(x-2)$ donc $f(x+1) = xf(x) \geq kx(x-2)$, donc $0 \leq \frac{1}{f(x+1)} \leq \frac{1}{kx(x-2)}$. Finalement, pour tout $x > 3$, $0 \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{k(x-1)(x-3)}$.

Comme $\frac{1}{k(x-1)(x-3)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{kx^2}$, l'intégrale $\int_4^{+\infty} \frac{1}{k(x-1)(x-3)} dx$ converge, donc par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f}$ converge.

Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{f}$ converge.