

Sommes de familles finies

Dans ce chapitre, $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Sommes finies

Proposition 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ $2n$ éléments de E , λ un scalaire.

Alors

- pour tout $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $p \leq q$, $\sum_{k=p}^n x_k = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^n x_k$;
- pour toute bijection φ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même, $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)}$;
- pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{k=p}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=p}^n x_k + \sum_{k=p}^n y_k$ et $\sum_{k=p}^n (\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=p}^n x_k$;
- si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k \leq y_k$, alors $\sum_{k=p}^n x_k \leq \sum_{k=p}^n y_k$.

Démonstration.

— On pose $\mathcal{P}(n)$ la proposition

$$\llbracket \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \forall (p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad p \leq q \Rightarrow \sum_{k=p}^n x_k = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^n x_k \rrbracket.$$

Si $n = 1$, alors pour tout $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $p = q = 1$ donc $\sum_{k=p}^n x_k = x_1 + 0 = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^n x_k$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(p, q) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$ tel que $p \leq q$:

- si $q \leq n$, alors par définition, $\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^n x_k + x_{n+1}$, donc d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^n x_k + x_{n+1} = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k ;$$

- si $q = n+1$, alors $\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^q x_k + 0 = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$.

Dans les deux cas, on a montré $\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$. Autrement dit $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

— on pose $\mathcal{Q}(n)$ le prédicat

$$\llbracket \text{pour toute bijection } \varphi \text{ de } \llbracket 1, n \rrbracket \text{ dans lui-même, } \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)} \rrbracket.$$

$\mathcal{Q}(1)$ est vraie, car la seule bijection de $\llbracket 1, 1 \rrbracket$ dans lui-même est l'application $1 \mapsto 1$.

Si $\mathcal{Q}(n)$ est vraie, alors soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et φ une bijection φ de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ dans lui-même :

- si $\varphi(n+1) = n+1$, alors φ induit une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même, donc d'après l'hypothèse de

$$\text{récurrence, } \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)}, \text{ donc } \sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(n+1)} = \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k ;$$

- si $\varphi(n+1) = m \neq n+1$, alors

on pose $\psi = (m, n+1) \circ \varphi$ (composée d'une transposition avec φ) et $a = \varphi^{-1}(n+1)$,

dans ce cas, $\psi(n+1) = n+1$, $\psi(a) = m$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket - \{a, n+1\}$, $\psi(k) = \varphi(k)$, donc

$$\text{d'après le cas précédent, } \sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n+1} x_{\psi(k)}, \text{ donc en utilisant le résultat précédent,}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} x_k &= \sum_{k=1}^{a-1} x_{\psi(k)} + x_{\psi(a)} + \sum_{k=a+1}^n x_{\psi(k)} + x_{\psi(n+1)} = \sum_{k=1}^{a-1} x_{\varphi(k)} + x_m + \sum_{k=a+1}^n x_{\varphi(k)} + x_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{a-1} x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(n+1)} + \sum_{k=a+1}^n x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(a)} = \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)}
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a montré $\sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$. Autrement dit $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.

— on pose $\mathcal{R}(n)$ le prédicat « $\forall (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in E^{2n} \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{k=p}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=p}^n x_k + \sum_{k=p}^n y_k$ ».

$$\mathcal{R}(1) \text{ est vraie, car } \sum_{k=1}^1 (x_k + y_k) = x_1 + y_1 = \sum_{k=1}^1 x_k + \sum_{k=1}^1 y_k.$$

Si $\mathcal{R}(n)$ est vraie, alors soit $p \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

- si $p \leq n$, alors $\sum_{k=p}^{n+1} (x_k + y_k) = \sum_{k=p}^n (x_k + y_k) + (x_{n+1} + y_{n+1}) = \sum_{k=p}^n x_k + \sum_{k=p}^n y_k + x_{n+1} + y_{n+1} = \sum_{k=p}^n x_k + x_{n+1} + \sum_{k=p}^n y_k + y_{n+1} = \sum_{k=p}^n x_k + x_{n+1} + \sum_{k=p}^{n+1} y_k + y_{n+1} = \sum_{k=p}^{n+1} x_k + \sum_{k=p}^{n+1} y_k$
- si $p = n+1$, alors on conclut directement comme dans le cas $n = 1$

Dans les deux cas, on a montré $\sum_{k=p}^{n+1} (x_k + y_k) = \sum_{k=p}^{n+1} x_k + \sum_{k=p}^{n+1} y_k$. Autrement dit $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{R}(n)$ est vraie.

— Les derniers points se démontrent de même par récurrence.

Proposition 2. Soit I un ensemble fini et non vide d'indices, n son cardinal. Soit f, g deux bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans I (des énumérations de I).

Alors pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E , $\sum_{k=1}^n x_{f(k)} = \sum_{k=1}^n x_{g(k)}$.

Démonstration. Soit I un ensemble fini et non vide d'indices, n son cardinal, f, g deux énumérations de I et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

Alors $g^{-1} \circ f$ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même, donc d'après la proposition 1,

$$\sum_{k=1}^n x_{g(k)} = \sum_{k=1}^n x_{g(g^{-1} \circ f(k))} = \sum_{k=1}^n x_{f(k)}.$$

Autrement dit, quel que soit l'ordre dans lequel on numérote les éléments de la famille $(x_i)_{i \in I}$ puis en les additionnant dans cet ordre, on obtient toujours la même somme.

Définition. Si I est un ensemble fini d'indices et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E , alors on pose $\sum_{i \in I} x_i$ la valeur d'une somme $\sum_{k=1}^n x_{f(k)}$, où f est une quelconque bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans I .

Cette définition est cohérente, puisque la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n x_{f(k)}$ ne dépend pas du choix de f d'après la proposition précédente. Autrement dit, il est inutile de connaître l'énumération choisie pour additionner les éléments de la famille, on peut considérer cette somme comme une somme « en vrac » de tous les éléments.

1.1 Propriétés

Proposition 3. Soit I un ensemble fini d'indices et $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in J}$ deux familles d'éléments de E , λ un scalaire.

Alors

- pour toute bijection f d'un ensemble J dans I , $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{f(j)}$ (changement de variable, d'indice dans une somme);
- pour toute bijection f de I dans lui-même, $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{f(i)}$ (propriété de commutativité);
- pour tout couple (J, J') de parties de I disjointes et de réunion I , $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in J'} x_i$ (propriété d'associativité);
- plus généralement, pour toute partition $(I_k)_{k \in K}$ de l'ensemble I , $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} x_i \right)$;
- si $J \subset I$ et pour tout $i \in I$, x_i est un réel positif, alors $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$;
- $\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$ et $\sum_{i \in I} (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i$;
- si pour tout $i \in I$, $x_i \leq y_i$, alors $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.

Démonstration. On appelle n le cardinal de I .

- Soit f une bijection de J dans I . On choisit une énumération ψ de J . Alors $f \circ \psi$ est une énumération de I .

Alors par définition, $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k=1}^n x_{f \circ \psi(k)}$ et $\sum_{j \in J} x_{f(j)} = \sum_{k=1}^n x_{f(\psi(k))}$, donc $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{f(j)}$.

- Cas particulier $I = J$ du point précédent.
- Soit (J, J') un couple de parties de I disjointes et de réunion I . On note q le cardinal de J , de sorte que $n - q$ est le cardinal de J' .

On choisit une énumération φ de J et une énumération ψ de J , alors l'application

$$\begin{aligned} \theta : [1, n] &\longrightarrow I \\ k &\longmapsto \varphi(k) \text{ si } k \leq q \\ k &\longmapsto \psi(k - q) \text{ si } k \geq q + 1 \end{aligned}$$

est une énumération de I .

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sum_{i \in I} x_i &= \sum_{k=1}^n x_{\theta(k)} = \sum_{k=1}^q x_{\theta(k)} + \sum_{k=q+1}^n x_{\theta(k)} = \sum_{k=1}^q x_{\varphi(k)} + \sum_{k=q+1}^n x_{\psi(k-q)} = \sum_{k=1}^q x_{\varphi(k)} + \sum_{k=1}^{n-q} x_{\psi(k)} = \\ &= \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in J'} x_i. \end{aligned}$$

Puis si $(I_k)_{k \in K}$ est une partition de l'ensemble I , l'ensemble K est fini donc par récurrence sur le cardinal

b de K , on montre $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} x_i \right)$ en utilisant le cas $b = 2$ démontré précédemment (il suffit de

choisir un élément a de K , poser $J = I_a$ et $J' = \bigsqcup_{k \in K - \{a\}} I_k$ et remarquer que la famille $(I_k)_{k \in K - \{a\}}$ est

une partition de l'ensemble J' et que le cardinal de $K - \{a\}$ est $b - 1$)

- Démonstrations immédiates des deux derniers points en utilisant une énumération de I .

•