

1 Démonstration du th. de sommation par paquets dans le cas des familles de réels positifs

Théorème 1. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

Si I est partitionné en une famille $(I_p)_{p \in P}$ de parties (i.e. deux à deux disjointes et de réunion I), alors

$$\sum_{p \in P} \left(\sum_{i \in I_p} x_i \right) = \sum_{i \in I} x_i$$

Démonstration. On note $S = \sum_{i \in I} x_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On remarque que par simple distributivité de l'intersection pour la réunion, pour toute partie J de I ,

$$J = J \cap I = J \cap \left(\bigsqcup_{p \in P} I_p \right) = \bigsqcup_{p \in P} J \cap I_p$$

On commence par le cas où P est un ensemble fini $\{p_1, \dots, p_n\}$ et on note $P_k = I_{p_k}$ pour alléger les notations.

On note aussi $S_k = \sum_{i \in P_k} x_i$. L'objectif est donc de montrer que $S = \sum_{k=1}^n S_k$.

Soit $J \subset_f I : J = \bigsqcup_{k=1}^n J \cap P_k$ (réunion finie d'ensembles finis), donc d'après la proposition 3 du cours,

$$\sum_{i \in J} x_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i \in J \cap P_k} x_i$$

De plus, d'après la prop. 8 du cours, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, comme $J \cap P_k \subset P_k$,

$$\sum_{i \in J \cap P_k} x_i \leq \sum_{i \in P_k} x_i = S_k$$

Donc

$$\sum_{i \in J} x_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i \in J \cap P_k} x_i \leq \sum_{k=1}^n S_k$$

Ceci est vrai pour toute partie $J \subset_f I$, donc ceci prouve que $S \leq \sum_{k=1}^n S_k$.

Réciproquement, soit $J_1, \dots, J_n$ des parties finies de $P_1, \dots, P_n$ respectivement. On pose alors $J = \bigsqcup_{k=1}^n J_k$: c'est une réunion finie de parties finies (2 à 2 disjointes) de I donc $J \subset_f I$.

Donc d'après la proposition 3 du cours,

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i \in J_k} x_i = \sum_{i \in J} x_i \leq S$$

donc

$$\sum_{i \in J_1} x_i \leq S - \sum_{k=2}^n \sum_{i \in J_k} x_i$$

ceci est vrai pour toute partie $J_1 \subset_f P_1$, donc

$$\sum_{i \in P_1} x_i = S_1 \leq S - \sum_{k=2}^n \sum_{i \in J_k} x_i$$

Puis on a de même en isolant $\sum_{i \in J_2} x_i$:

$$\sum_{i \in J_2} x_i \leq S - S_1 - \sum_{k=3}^n \sum_{i \in J_k} x_i$$

et le même raisonnement prouve que

$$\sum_{i \in P_2} x_i = S_2 \leq S - S_1 - \sum_{k=3}^n \sum_{i \in J_k} x_i$$

Et on réitère (autrement dit par récurrence finie) : si pour $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\sum_{i \in J_\ell} x_i \leq S - \sum_{k=1}^{\ell-1} S_k - \sum_{k=\ell+1}^n \sum_{i \in J_k} x_i$$

alors comme ceci est vrai pour toute partie finie de P_ℓ , on en déduit

$$S_\ell \leq S - \sum_{k=1}^{\ell-1} S_k - \sum_{k=\ell+1}^n \sum_{i \in J_k} x_i$$

donc en isolant $\sum_{i \in J_{\ell+1}} x_i$

$$\sum_{i \in J_{\ell+1}} x_i \leq S - \sum_{k=1}^{\ell} S_k - \sum_{k=\ell+2}^n \sum_{i \in J_k} x_i$$

Finalement, on obtient donc $S_n \leq S - S_1 - S_2 - \dots - S_{n-1}$, donc $\sum_{k=1}^n S_k \leq S$.

La double inégalité montre donc que $S = \sum_{k=1}^n S_k$.

Maintenant que l'on sait que le th. de sommation par paquets est valide dans le cas où P est un ensemble fini, on démontre le cas où P est infini.

Soit $Q \subset_f P$. La famille $(I_p)_{p \in Q}$ est alors une partition finie de $I_Q = \bigsqcup_{p \in Q} I_p$. On peut donc appliquer ce qu'on vient de prouver.

$$\sum_{p \in Q} \sum_{i \in I_p} x_i = \sum_{i \in I_Q} x_i$$

Or $I_Q \subset I$, donc d'après la prop. 8

$$\sum_{p \in Q} \sum_{i \in I_p} x_i \leq S$$

Ceci est donc vrai pour toute partie finie Q de P , ce qui prouve par définition de la somme d'une famille de réels positifs que

$$\sum_{p \in P} \sum_{i \in I_p} x_i \leq S$$

Réciproquement, soit $J \subset_f I$. On a $J = \bigsqcup_{p \in P} J \cap I_p$, or J est finie, donc dans cette réunion disjointe, toutes

les parties $J \cap I_p$ sont vides, sauf pour un nombre fini d'entre elles (il y en a au plus $\text{card}(J)$) : on les note $J \cap I_{p_1}, \dots, J \cap I_{p_n}$ et on pose $Q = \{p_1, \dots, p_n\}$, partie finie de P .

Alors $J = \bigsqcup_{k=1}^n J \cap I_{p_k} = \bigsqcup_{p \in Q} J \cap I_p$ (réunion finie d'ensembles finis) donc $\sum_{i \in J} x_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i \in J \cap I_{p_k}} x_i$ (prop. 3).

Donc

$$\sum_{i \in J} x_i = \sum_{p \in Q} \sum_{i \in J \cap I_p} x_i \leq \sum_{p \in Q} \sum_{i \in I_p} x_i \leq \sum_{p \in P} \sum_{i \in I_p} x_i$$

On a donc la double inégalité, ce qui prouve

$$S = \sum_{p \in P} \sum_{i \in I_p} x_i$$

•

2 Démonstration du th. de sommation par paquets dans le cas des familles sommables de nombres réels

La démonstration est sensiblement plus compliquée. Elle est découpée en résultats indépendants qui seront assemblés dans la preuve finale

2.1 Un cas particulier

On commence d'abord par prouver une version faible du th. de sommation par paquets.

Lemme 1. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres réels. Soit K une partie de I , on note $\bar{K}$ le complémentaire de K dans I .

Alors les familles $(x_i)_{i \in K}$ et $(x_i)_{i \in \bar{K}}$ sont sommables et $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in K} x_i + \sum_{i \in \bar{K}} x_i$.

Démonstration. Soit $J \subset_f K$, alors $J \subset_f I$, donc $\sum_{i \in K} |x_i| \leq \sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$, donc la famille $(x_i)_{i \in K}$ est sommable. De même, en échangeant les rôles de K et $\bar{K}$, la famille $(x_i)_{i \in \bar{K}}$ est sommable.

La famille $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de réels, alors $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$ est la différence de deux sommes de familles de réels positifs, donc sur lesquelles on peut appliquer le th. de sommation par paquets.

$$\text{Donc } \sum_{i \in I} x_i^+ = \sum_{i \in K} x_i^+ + \sum_{i \in \bar{K}} x_i^+ \text{ et } \sum_{i \in I} x_i^- = \sum_{i \in K} x_i^- + \sum_{i \in \bar{K}} x_i^-.$$

$$\text{Donc } \sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in K} x_i^+ - \sum_{i \in K} x_i^- + \sum_{i \in \bar{K}} x_i^+ - \sum_{i \in \bar{K}} x_i^- = \sum_{i \in K} x_i + \sum_{i \in \bar{K}} x_i. \quad \bullet$$

On en déduit la version « finie » du th. de sommation par paquets.

Lemme 2. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres réels, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(K_1, \dots, K_n)$ une partition de I .

Alors pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les familles $(x_i)_{i \in K_p}$ sont sommables et $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{p=1}^n \sum_{i \in K_p} x_i$.

Démonstration. Par récurrence sur n en utilisant le lemme 1 et le fait que $I = \left(\bigsqcup_{p=1}^{n-1} K_p \right) \sqcup K_n$. •

Autrement, si on partage I en une quantité finie de sous-parties, alors le th. de sommation par paquets est vrai.

2.2 Caractérisation équivalente de la sommabilité : cas des familles de réels

Théorème 2. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

— $(x_i)_{i \in I}$ est sommable

— $\exists s \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \subset_f I \quad \forall G \subset_f I \quad F \subset G \Rightarrow \left| \sum_{i \in G} x_i - s \right| \leq \varepsilon$

Démonstration. On suppose que la famille de réels $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, ce qui signifie que les familles de réels positifs $(x_i^+)_{i \in I}$ et $(x_i^-)_{i \in I}$ sont sommables. On pose $s^+ = \sum_{i \in I} x_i^+$ et $s^- = \sum_{i \in I} x_i^-$, de sorte que

$$\sum_{i \in I} x_i = s^+ - s^- \text{ et } \sum_{i \in I} |x_i| = s^+ + s^-.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de s^+ et s^- (bornes supérieures...), il existe deux parties finies J_+ et J_- de I telles que $s^+ - \varepsilon \leq \sum_{i \in J_+} x_i^+ \leq s^+$ et $s^- - \varepsilon \leq \sum_{i \in J_-} x_i^- \leq s^-$. On pose $F = J_+ \cup J_-$;

Comme les nombres x_i^+ et x_i^- sont positifs, alors $\sum_{i \in J_+} x_i^+ \leq \sum_{i \in F} x_i^+ \leq s^+$ et $\sum_{i \in J_-} x_i^- \leq \sum_{i \in F} x_i^- \leq s^-$.

On a donc $s^+ - \varepsilon \leq \sum_{i \in F} x_i^+ \leq s^+$ et $s^- - \varepsilon \leq \sum_{i \in F} x_i^- \leq s^-$.

Soit maintenant $G \subset_f I$ tel que $F \subset G$, alors de même, $\sum_{i \in F} x_i^+ \leq \sum_{i \in G} x_i^+ \leq s^+$ et $\sum_{i \in F} x_i^- \leq \sum_{i \in G} x_i^- \leq s^-$.

Donc $s^+ - \varepsilon \leq \sum_{i \in G} x_i^+ \leq s^+$ et $s^- - \varepsilon \leq \sum_{i \in G} x_i^- \leq s^-$.

Donc $s^+ - s^- - \varepsilon \leq \sum_{i \in G} x_i^+ - \sum_{i \in G} x_i^- \leq s^+ - s^- + \varepsilon$, c'est-à-dire $s - \varepsilon \leq \sum_{i \in G} x_i \leq s + \varepsilon$.

On a donc démontré le sens direct de l'équivalence.

Réciproquement, on suppose $\exists s \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \subset_f I \quad \forall G \subset_f I \quad F \subset G \Rightarrow \left| \sum_{i \in G} x_i - s \right| \leq \varepsilon$.

Avec $\varepsilon = 42$, on a une partie $F \subset_f I$ telle que pour toute partie $G \subset_f I$, si $F \subset G$, alors $\left| \sum_{i \in G} x_i - s \right| \leq 42$.

Soit $G \subset_f I$. $G \cup F$ est donc une partie finie de I qui contient F donc $\left| \sum_{i \in G \cup F} x_i - s \right| \leq 42$.

Or $\sum_{i \in G \cup F} x_i = \sum_{i \in G} x_i + \sum_{i \in F - G} x_i$. Donc par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \in G} x_i \right| &= \left| \sum_{i \in G \cup F} x_i - s - \sum_{i \in F - G} x_i + s \right| \\ &\leq \left| \sum_{i \in G \cup F} x_i - s \right| + \left| \sum_{i \in F - G} x_i \right| + |s| \\ &\leq 42 + \sum_{i \in F - G} |x_i| + |s| \\ &\leq 42 + \sum_{i \in F} |x_i| + |s| \end{aligned}$$

Donc en posant $M = 42 + \sum_{i \in F} |x_i| + |s|$ (qui est une constante), on a donc montré que

$$\text{pour toute partie } G \subset_f I, \left| \sum_{i \in G} x_i \right| \leq M.$$

Maintenant, soit $G \subset_f I$. On note $G_+ = \{i \in G \mid x_i \geq 0\}$ et $G_- = \{i \in I \mid x_i < 0\}$. D'après ce qui précède,

$$\left| \sum_{i \in G_+} x_i \right| \leq M \quad \text{et} \quad \left| \sum_{i \in G_-} x_i \right| \leq M$$

Or $\left| \sum_{i \in G_+} x_i \right| = \sum_{i \in G_+} x_i$ et $\left| \sum_{i \in G_-} x_i \right| = - \sum_{i \in G_-} x_i$, donc $\sum_{i \in G} x_i^+ = \sum_{i \in G_+} x_i \leq M$ et $\sum_{i \in G} x_i^- = - \sum_{i \in G_-} x_i \leq M$,

donc $\sum_{i \in G} |x_i| = \sum_{i \in G} x_i^+ + \sum_{i \in G} x_i^- \leq 2M$.

On a montré : $\exists M' \geq 0 \quad \forall G \subset_f I \quad \sum_{i \in G} |x_i| \leq M'$, c'est-à-dire $(x_i)_{i \in I}$ est sommable. •

2.3 Le théorème de sommation par paquets

Théorème 3. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres réels.

Si I est partitionné en une famille $(I_p)_{p \in P}$ de parties (i.e. deux à deux disjointes et de réunion I),

alors la famille $\left(\sum_{i \in I_p} x_i \right)_{p \in P}$ est sommable et $\sum_{p \in P} \left(\sum_{i \in I_p} x_i \right) = \sum_{i \in I} x_i$

Démonstration. La famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable donc $\sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$.

Pour tout $p \in P$, $I_p \subset I$ donc $\sum_{i \in I_p} |x_i| \leq \sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$, donc la sous-famille $(x_i)_{i \in I_p}$ est sommable et sa somme vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{i \in I_p} x_i \right| \leq \sum_{i \in I_p} |x_i|$$

D'après le th. de sommation par paquets sur les familles positives

$$\sum_{p \in P} \sum_{i \in I_p} |x_i| = \sum_{i \in I} |x_i|$$

Donc d'après la prop. 8 du cours,

$$\sum_{p \in P} \left| \sum_{i \in I_p} x_i \right| \leq \sum_{p \in P} \sum_{i \in I_p} |x_i| < +\infty$$

La famille $\left(\sum_{i \in I_p} x_i \right)_{p \in P}$ est donc sommable.

Il reste à prouver l'égalité des sommes. On suppose qu'aucune partie I_p n'est vide (les parties vides donnent des sommes nulles, donc ne servent à rien dans la partition de I : on peut les supprimer sans rien changer).

On note $s = \sum_{i \in I} x_i$ et $s' = \sum_{p \in P} \left(\sum_{i \in I_p} x_i \right)$, ainsi que $S = \sum_{i \in I} |x_i|$, qui est aussi égal à $\sum_{p \in P} \left(\sum_{i \in I_p} |x_i| \right)$ d'après le théorème 1.

Comme $I = \bigsqcup_{p \in P} I_p$, alors pour tout $i \in I$, il existe un unique $\pi(i) \in P$ tel que $i \in I_{\pi(i)}$. On définit ainsi une application surjective $\pi : I \rightarrow P$

Soit $G \subset_f I$. Alors $\pi(G) = \{\pi(i) \mid i \in G\}$ est l'image d'un ensemble fini par une application, c'est donc lui-même un ensemble fini. Puis on pose $H = \bigsqcup_{p \in \pi(G)} I_p$, de sorte que $G \subset H$ et $\sum_{i \in H} x_i = \sum_{p \in \pi(G)} \sum_{i \in I_p} x_i$ d'après le lemme 2 ($\pi(G)$ est un ensemble fini).

D'après le lemme 1,

$$\left| \sum_{i \in H} x_i - \sum_{i \in G} x_i \right| = \left| \sum_{i \in H-G} x_i \right| \leq \sum_{i \in H-G} |x_i| = \sum_{i \in H} |x_i| - \sum_{i \in G} |x_i| \leq S - \sum_{i \in G} |x_i| \quad (1)$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 2 utilisé 3 fois,

il existe $A \subset_f P$ tel que pour tout B tel que $A \subset B \subset_f P$, $\left| \sum_{p \in B} \sum_{i \in I_p} x_i - s' \right| \leq \varepsilon$.

A étant une partie finie de P et π étant surjective, on peut choisir pour chaque élément de A un seul de ces antécédents : on construit ainsi une partie finie J de I telle que $A = \pi(J)$.

Alors pour toute partie G de I telle que $J \subset G \subset_f I$, $\pi(J) = A \subset \pi(G) \subset_f P$, donc $\left| \sum_{p \in \pi(G)} \sum_{i \in I_p} x_i - s' \right| \leq \varepsilon$.

De même, il existe $F \subset_f I$ tel que pour tout G tel que $F \subset G \subset_f I$, $\left| \sum_{i \in G} |x_i| - S \right| = S - \sum_{i \in G} |x_i| \leq \varepsilon$.

Donc d'après l'inégalité (1), pour tout G tel que $F \subset G \subset_f I$, $\left| \sum_{p \in \pi(G)} \sum_{i \in I_p} x_i - \sum_{i \in G} x_i \right| \leq \varepsilon$.

Et enfin, il existe $K \subset_f I$ tel que pour tout G tel que $K \subset G \subset_f I$, $\left| \sum_{i \in G} x_i - s \right| \leq \varepsilon$.

On pose alors $G = J \cup F \cup K$: c'est une partie finie de I qui contient J , F et K donc elle vérifie les trois inégalités précédentes :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p \in \pi(G)} \sum_{i \in I_p} x_i - s' \right| &\leq \varepsilon \\ \left| \sum_{p \in \pi(G)} \sum_{i \in I_p} x_i - \sum_{i \in G} x_i \right| &\leq \varepsilon \\ \left| \sum_{i \in G} x_i - s \right| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc par inégalité triangulaire, on obtient

$$|s - s'| \leq 3\varepsilon$$

On a donc montré : $\forall \varepsilon > 0 \quad |s - s'| \leq 3\varepsilon$, donc $s = s'$. •

3 Démonstration du th. de sommation par paquets dans le cas des familles sommables de nombres complexes

Pour ne pas mélanger les notations, on note ω une racine carrée de -1 (ω désigne ici le complexe i habituel).

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de nombres complexes, on rappelle que $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(x_i) + \omega \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(x_i)$,

Il suffit de travailler séparément sur les parties réelle et imaginaire et d'utiliser deux fois le résultat sur les réels ainsi que la linéarité du symbole $\sum$.