

Familles sommables

Dans ce chapitre, $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Si A, B sont deux ensembles, alors on note $A \subset_f B$ pour indiquer que A est un sous-ensemble fini de B .

1 Sommes finies

1.1 Définition

D'abord un rappel : on définit par récurrence la somme de n éléments numérotés de E $x_1, \dots, x_n$ par

- si $n = 0$, alors $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ (une somme vide a pour valeur 0 par convention) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) + x_{n+1}$.

On définit de même par récurrence les sommes de la forme $\sum_{k=p}^q x_k$ quand $p - 1 \leq q$ (si $q = p - 1$, la somme est vide donc vaut 0).

Proposition 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ $2n$ éléments de E , λ un scalaire.

Alors

- pour tout $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $p \leq q$, $\sum_{k=p}^n x_k = \sum_{k=p}^q x_k + \sum_{k=q+1}^n x_k$;
- pour toute bijection φ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même, $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)}$;
- pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{k=p}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=p}^n x_k + \sum_{k=p}^n y_k$ et $\sum_{k=p}^n (\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=p}^n x_k$;
- si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k \leq y_k$, alors $\sum_{k=p}^n x_k \leq \sum_{k=p}^n y_k$.

Proposition 2. Soit I un ensemble fini et non vide d'indices, n son cardinal. Soit f, g deux bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans I (des énumérations de I).

Alors pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E , $\sum_{k=1}^n x_{f(k)} = \sum_{k=1}^n x_{g(k)}$.

Autrement dit, quel que soit l'ordre dans lequel on numérote les éléments de la famille $(x_i)_{i \in I}$ puis en les additionnant dans cet ordre, on obtient toujours la même somme.

Définition. Si I est un ensemble fini d'indices et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E , alors on pose $\sum_{i \in I} x_i$

la valeur d'une somme $\sum_{k=1}^n x_{f(k)}$, où f est une quelconque bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans I .

Cette définition est cohérente, puisque la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n x_{f(k)}$ ne dépend pas du choix de f d'après la proposition précédente. Autrement dit, il est inutile de connaître l'énumération choisie pour additionner les éléments de la famille, on peut considérer cette somme comme une somme « en vrac » de tous les éléments.

1.2 Propriétés

Proposition 3. Soit I un ensemble fini d'indices et $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in J}$ deux familles d'éléments de E , λ un scalaire.

Alors

- pour toute bijection f d'un ensemble J dans I , $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{f(j)}$ (changement de variable, d'indice dans une somme);
- pour toute bijection f de I dans lui-même, $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{f(i)}$ (propriété de commutativité);
- pour tout couple (J, J') de parties de I disjointes et de réunion I , $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in J'} x_i$ (propriété d'associativité);
- plus généralement, pour toute partition $(I_k)_{k \in K}$ de l'ensemble I , $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I_k} x_i \right)$;
- si $J \subset I$ et pour tout $i \in I$, x_i est un réel positif, alors $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$;
- $\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$ et $\sum_{i \in I} (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i$;
- si pour tout $i \in I$, $x_i \leq y_i$, alors $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.

2 Conventions de calcul dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

L'ensemble $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est muni d'une addition : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}^2$,

- si x et y sont réels, $x + y$ est la somme habituelle de deux réels positifs;
- si $x = +\infty$ ou $y = +\infty$, alors on pose $x + y = +\infty$.

et d'une multiplication :

- si x et y sont réels, xy est le produit habituel de deux réels positifs;
- si $x = 0$ ou $y = 0$, alors on pose $xy = 0$;
- si $x = y = +\infty$, alors on pose $xy = +\infty$.

Il est aussi muni d'une relation d'ordre :

- si x et y sont deux réels, alors $x \leq y$ ou $x < y$ désignent les relations habituelles;
- si x est réel et $y = +\infty$, alors on pose $x \leq +\infty$ et aussi $x < +\infty$;
- si $x = y = +\infty$, alors $+\infty \leq +\infty$.

Proposition 4. L'addition dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est associative, commutative, et admet pour neutre 0.

La relation $\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

De plus l'addition et la multiplication sont compatibles avec la relation d'ordre : on peut additionner ou multiplier deux inégalités membre à membre.

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, non vide.

Si A est une partie ne contenant pas $+\infty$, alors

- si A est majorée, elle possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$;
- sinon on pose $\sup A = +\infty$.

Si A est une partie contenant $+\infty$, alors on pose $\sup A = +\infty$.

Cette définition prolonge la notion de borne supérieure à toutes les parties de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, au sens où pour toute partie A de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\sup A$ est le plus petit majorant dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de la partie A .

3 Somme d'une famille de réels positifs

Définition. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On pose $\sum_{i \in I} x_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} x_j \mid J \subset_f I \right\}$.

Remarque. Cette définition est sensée, car l'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} x_j \mid J \subset_f I \right\}$ est une partie de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, donc possède toujours une borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Définition. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable quand $\sum_{i \in I} x_i < +\infty$.

Évidemment, une famille sommable positive ne peut pas prendre la valeur $+\infty$, autrement dit une famille sommable est nécessairement une famille de réels positifs.

3.1 Cas des séries à termes positifs

Proposition 5. Soit u une suite de réels positifs.

Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et s.si la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. Dans ce cas, les sommes coïncident :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

3.2 Propriétés

Proposition 6. La somme d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est invariante par permutation (i.e par changement de variable) :

si σ est une permutation de I , alors $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)}$.

En particulier, si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille sommable, toute permutation de la famille est encore une famille sommable, de même somme.

En particulier, dans le cas où $I = \mathbb{N}$, si une série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente, alors on dit qu'elle est commutativement convergente : changer l'ordre des termes change bien sûr les valeurs des sommes partielles mais ne change pas la valeur de la limites de ces sommes partielles.

Démonstration. On pose $S = \sum_{i \in I} x_i$ et $S' = \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)}$.

Soit $J \subset_f I$. Alors $\sigma(J)$ est aussi une partie finie de I , donc $\sum_{j \in \sigma(J)} x_j \leq S$, c'est-à-dire $\sum_{i \in J} x_{\sigma(i)} \leq S$. Donc

$S' \leq S$.

La même preuve, en échangeant les deux familles et en remplaçant σ par σ^{-1} , montre que pour tout $J \subset_f I$, $\sum_{i \in J} x_{\sigma^{-1}(\sigma(i))} = S \leq S'$. Donc $S = S'$. •

Proposition 7. Soit $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et λ un réel positif.

Alors $\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$ et $\sum_{i \in I} (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i$.

Démonstration. Pour simplifier, on note $S(x)$ la somme $\sum_{i \in I} x_i$.

— Soit $J \subset_f I$. Alors $\sum_{i \in J} (x_i + y_i) = \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in J} y_i \leq S(x) + S(y)$.

Ceci étant vraie pour toute partie finie J de I , on en déduit que $S(x + y) \leq S(x) + S(y)$.

Réciproquement, soit $J \subset_f I$, $K \subset_f I$.

Alors $\sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in K} y_i \leq \sum_{i \in J \cup K} x_i + \sum_{i \in J \cup K} y_i = \sum_{i \in J \cup K} (x_i + y_i) \leq S(x + y)$.

On a montré que pour tout $J \subset_f I$, $\sum_{i \in J} x_i \leq S(x + y) - \sum_{i \in K} y_i$. Donc $S(x) \leq S(x + y) - \sum_{i \in K} y_i$.

On a montré que pour tout $K \subset_f I$, $\sum_{i \in K} y_i \leq S(x + y) - S(x)$. Donc $S(y) \leq S(x + y) - S(x)$ i.e.

$S(x) + S(y) \leq S(x + y)$.

Avec les deux inégalités en sens opposé, on en déduit l'égalité $S(x + y) = S(x) + S(y)$.

— Soit $J \subset_f I$. Alors $\sum_{i \in J} (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i \in J} x_i \leq \lambda S(x)$.

Ceci étant vraie pour toute partie finie J de I , on en déduit que $S(\lambda x) \leq \lambda S(x)$.

Si $\lambda = 0$, on a directement $S(\lambda x) = \lambda S(x) = 0$.

Si $\lambda > 0$, alors de même, $S(x) = S\left(\frac{1}{\lambda} \lambda x\right) \leq \frac{1}{\lambda} S(\lambda x)$, donc $\lambda S(x) \leq S(\lambda x)$.

Avec les deux inégalités en sens opposé, on en déduit l'égalité $S(\lambda x) = \lambda S(x)$.

•

Corollaire 1. La somme de deux familles positives est sommable si et s.si les deux familles sont sommables. Le produit par un réel strictement positif d'une famille positive est sommable si et s.si la famille est sommable.

Proposition 8. Soit $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si pour tout $i \in I$, $0 \leq x_i \leq y_i$ et la famille $(y_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la famille $(x_i)_{i \in I}$ l'est aussi et $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.

Démonstration. Soit $J \subset_f I$, alors comme pour tout $i \in J$, $x_i \leq y_i$, on en déduit (propriété classique des sommes finies : proposition 3) que $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in J} y_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.

Ceci est vrai pour toute partie finie J de I , donc $\sum_{i \in I} x_i = \sup_{J \subset_f I} \sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$,

ce qui prouve $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.

•

Proposition 9. Toute sous-famille d'une famille positive sommable est elle-même sommable : si $J \subset I$ et $(x_i)_{i \in I}$ est une famille positive sommable, alors $(x_i)_{i \in J}$ est sommable et $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$.

Démonstration. Si $K \subset_f J$, alors $K \subset_f I$ donc par définition, $\sum_{i \in K} x_i \leq S = \sum_{i \in I} x_i$.

Ceci est vrai pour toute partie finie K de J , donc $\sum_{i \in J} x_i = \sup_{K \subset_f J} \sum_{i \in K} x_i \leq S$,

ce qui prouve $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$.

•

3.3 Théorème de sommation par paquets

Théorème 1. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

Si I est partitionné en une famille $(I_p)_{p \in P}$ de parties (i.e. deux à deux disjointes et de réunion I), alors

$$\sum_{p \in P} \left(\sum_{i \in I_p} x_i \right) = \sum_{i \in I} x_i$$

3.4 Théorème de Fubini

Théorème 2. Soit $(x_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels positifs. Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} x_{i,j} = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} x_{i,j} \right) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} x_{i,j} \right)$$

Ce résultat se généralise par récurrence dans le cas d'un produit cartésien $I_1 \times \dots \times I_k$.

Un cas particulier courant.

Proposition 10. Soit $(a_i)_{i \in I}, (b_j)_{j \in J}$ deux familles de réels positifs.

Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable si et s.si les familles $(a_i)_{i \in I}, (b_j)_{j \in J}$ sont sommables, dans ce cas on a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j$$

4 Familles sommables dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

4.1 Définitions

Définition. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable quand la famille $(|x_i|)_{i \in I}$ est sommable, c'est-à-dire quand $\sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$.

a) Cas réel

Définition. Soit x un réel.

On appelle partie positive de x le réel $x^+ = \max(0, x)$ et partie négative de x le réel $x^- = -\min(x, 0)$.

On remarque les égalités suivantes : $|x| = x^+ + x^-$ et $x = x^+ - x^-$.

Proposition 11. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres réels, alors les deux familles positives $(x_i^+)_{i \in I}$ et $(x_i^-)_{i \in I}$ sont sommables et on a bien sûr $\sum_{i \in I} |x_i| = \sum_{i \in I} x_i^+ + \sum_{i \in I} x_i^-$.

On pose alors $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$, qui est un réel tel que $\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i|$.

b) Cas complexe

Proposition 12. Soit $(a_k)_{k \in I}$ une famille sommable de nombres complexes, alors les deux familles réelles $(\operatorname{Re}(a_k))_{k \in I}$ et $(\operatorname{Im}(a_k))_{k \in I}$ sont sommables.

On pose alors $\sum_{k \in I} a_k = \sum_{k \in I} \operatorname{Re}(a_k) + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im}(a_k)$, qui est un complexe tel que $\left| \sum_{k \in I} a_k \right| \leq \sum_{k \in I} |a_k|$.

Exemples.

- Toute famille finie est sommable et sa somme au sens des familles sommables est sa somme habituelle.
- Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si et s.si la série $\sum a_n$ est absolument convergente. Dans ce cas, les deux notions de somme coïncident : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Exercices :

- 1) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrez que la famille $\left(\frac{e^{i\ell\theta}}{(k+\ell)^3} \right)_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable.

4.2 Propriétés

Proposition 13. *Toute sous-famille d'une famille sommable de E est elle-même sommable.*

Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille sommable, toute permutation de la famille est encore une famille sommable, de même somme.

En particulier, les séries absolument convergentes sont commutativement convergentes.

Comme pour les séries, on dispose d'un théorème de comparaison entre familles sommables.

Proposition 14. *Soit $(a_i)_{i \in I}$, $(b_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments indexées par I .*

Si pour tout $i \in I$, $0 \leq |a_i| \leq b_i$ et la famille $(b_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors la famille $(a_i)_{i \in I}$ l'est aussi et $\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i| \leq \sum_{i \in I} b_i$.

On note $\ell^1(I, E)$ l'ensemble des familles sommables de E indexées par I .

La linéarité est encore vérifiée, mais n'est pas évidente au regard des définitions.

Proposition 15. *L'ensemble $\ell^1(I, E)$ est un espace vectoriel et l'application $(a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i$ est une forme linéaire :*

si $(a_i), (b_i)$ sont dans $\ell^1(I, E)$ et λ un scalaire alors $\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$ et $\sum_{i \in I} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i$.

4.3 Théorème de sommation par paquets

Théorème 3. *Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille sommable de E .*

Si I est partitionné en une famille $(I_p)_{p \in P}$ de parties (i.e. deux à deux disjointes et de réunion I), alors pour tout $p \in P$, la sous-famille $(a_i)_{i \in I_p}$ est sommable et

$$\sum_{p \in P} \left(\sum_{i \in I_p} a_i \right) = \sum_{i \in I} a_i$$

Exercices :

- 2) Montrez que pour tout complexe z tel que $0 < |z| < 1$, la famille $(z^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et calculez sa somme.
- 3) Montrez que la famille $\left(\frac{(-1)^n}{\max(m, n)^3} \right)_{m, n \geq 1}$ est sommable et calculez sa somme en fonction de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.

4.4 Théorème de Fubini

Théorème 4. Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille sommable de E .

Alors pour tout $i \in I$, la famille $(a_{i,j})_{j \in J}$ est sommable ; pour tout $j \in J$, la famille $(a_{i,j})_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right)$$

Ce résultat se généralise par récurrence dans le cas d'un produit cartésien $I_1 \times \dots \times I_k$.

Exercices :

- 4) Montrez que la famille $\left(\frac{(-1)^p}{q^p} \right)_{p,q \geq 2}$ est sommable et calculez sa somme.

Un cas particulier courant.

Proposition 16. Soit $(a_i) \in \ell^1(I, E)$, $(b_j) \in \ell^1(J, E)$.

Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j$$

4.5 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries à termes dans E .

On appelle produit de Cauchy des deux séries la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Remarque. Quand les séries ne commencent pas à partir du rang 0, il faut se méfier ! Une idée simple est de se ramener au cas précédent en décalant les indices.

Exemple très courant : les séries commencent au rang 1. Dans ce cas, le produit de Cauchy des séries $\sum_{n \geq 1} a_n$ et

$\sum_{n \geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n \geq 1} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k}$.

Théorème 5. Si les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy est aussi absolument convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Un exemple fondamental.

Proposition 17. Soit $z \in \mathbb{C}$. La série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

Remarque. L'absolue convergence des séries est indispensable ! Si on ne suppose que la convergence des séries, alors le produit de Cauchy peut très bien être une série divergente (voir exercice).

Exercices :

- 5) Soit $x > 0$. On pose b_n la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et $c_n = \frac{b_n}{x^n}$. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ converge. Dans le cas où elle converge, donnez la valeur de sa somme en fonction de x .
- 6) Soit $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, mais que son produit de Cauchy avec elle-même diverge (indication : pour tout $b > 0$ et $x \in [0, b]$, $x(b-x) \leq \frac{b^2}{4}$).