

SÉRIES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

*1)

a) Montrez que la série de terme général $u_n = \arctan \frac{1}{2n^2}$ est convergente.

b) Montrez que pour $n \geq 1$, $u_n = \arctan \frac{n}{n+1} - \arctan \frac{n-1}{n}$.

c) Déduisez-en la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

*2) Justifiez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{2n-1}{n^3-n}$ converge et déterminez sa somme (indication : décomposition en éléments simples).

+**3) Donnez la nature des séries suivantes (α désigne une constante strictement positive, x un réel dans $] -1, +1[$) :

a) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n}$

b) $\sum \frac{\alpha^n}{1 + \alpha^{2n}}$

c) $\sum n\alpha^n$

d) $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^\alpha}$

e) $\sum 2 \ln(n^3 + 1) - 3 \ln(n^2 + 1)$

f) $\sum_{n \geq 2} \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$

g) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

h) $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

i) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n!}$

j) $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n^\alpha}$

k) $\sum \ln(1 + x^n)$

l) $\sum \frac{\sin n}{2^n}$

m) $\sum \frac{\sin n \sin \frac{1}{n}}{n}$

n) $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n}$

o) $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$

p) $\sum {}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n}$

q) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln n + \sin \frac{2n\pi}{3}}$

r) $\sum_{n \geq 1} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right)$

s) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\ln n \ln(\operatorname{ch} n)}$

t) $\sum \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{n^2 + \cos^2 t} dt$

+**4) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Déterminez a et b pour que la série de terme général $\ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ converge. Dans ce cas, donnez la valeur de sa somme.

b) Faites de même avec la série de terme général $\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

+**5) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série de terme général $u_n = (\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha$ converge-t-elle? Dans ce cas, donnez un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

+**6) On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n k^{3/2}$. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge-t-elle? Dans ce cas, donnez un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

+**7) Séries associées à des suites définies par récurrence.

a) Soit u la suite définie par récurrence par $u_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{ne^{u_n}}$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$?

b) Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Montrez que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$. Donnez un équivalent de u_n , puis la nature de la série $\sum u_n$, puis un équivalent de $\sum_{k=0}^n u_k$.

c) Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 \in]0, \pi[$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Quelle est la nature de la série $\sum \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \right)$? Puis celle de $\sum u_n$? Donnez un équivalent de $\sum_{k=0}^n u_k$.

+**8) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P(x) \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{e^k + P(k)}$.

- a) Justifiez l'existence de u_n .
- b) Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

**9) On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

- a) Justifiez l'existence de u_n .
- b) Montrez que $\frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ est le reste d'une série alternée absolument convergente.
- c) Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

+**10) Utilisation de dev. limités ou asymptotiques.

- a) Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$ converge.
- b) Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ converge.
- c) Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{1 + (-1)^n n}$ converge.
- d) Montrez que la série $\sum_{n \geq 0} \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + 1} \right)$ converge.
- e) Nature de la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{\ln \left(n + (-1)^n \sqrt{n} \right)}{n}$?
- f) Nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{1 + (-1)^n \sqrt{n}}$?

**11) Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n + n^\alpha}}$ converge-t-elle ?

+**12) Formule de Stirling : montrez que la suite de terme général $\frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n} \right)^n$ converge vers un réel strictement positif L (indication : passer au logarithme et penser à une série).

Soit $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$. On montre que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et que $u_{2n} = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$. En admettant ces résultats, montrez la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

**13) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^a}$.

- a) Dans le cas où $a \leq 0$ ou $a > 1$, quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$?
- b) On suppose désormais que $0 < a \leq 1$ et on pose $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$. Montrez que la série $\sum v_n$ converge. Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

+**14) Soit u une suite strictement positive, $\alpha > 0$. Montrez que les séries de termes généraux u_n , $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$, $w_n = \ln(1 + u_n)$ et $x_n = \int_0^{u_n} \frac{1}{1 + x^\alpha} \, dx$ sont de même nature.

**15) Soit u une suite réelle qui ne s'annule pas telle que $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ et $\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$. Montrez que si $|ab| < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

**16) Soit u une suite réelle positive décroissante. Montrez que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$. La réciproque est-elle vraie ?

+**17) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle strictement positive et bornée telle que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

- a) Montrez que $\frac{u_n}{S_n} \sim \ln \left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \right)$. Déduisez-en la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n}$.

b) Étudiez la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ quand $\alpha \in]0, 1[$.

c) Soit $\alpha > 1$. Montrez que $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha} dx$. Déduisez-en la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

****18)** Soit u une suite strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On suppose que $u_n s_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Déterminez un équivalent simple de u_n .

+19)** Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. On pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n$, puis $w_n = v_{n+1} - v_n$.

a) Montrez que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

b) Montrez que la suite (v_n) converge vers un réel $\ell > 0$. On pose alors $A = e^\ell > 1$.

c) Montrez que $u_n \sim A^{2^n}$.

*****20)** Transformation d'Abel.

Soit u une suite réelle et v une suite complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

On suppose que la suite u est positive et décroissante de limite nulle et la suite V est bornée.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k$.

b) Déduisez-en que la série $\sum u_n v_n$ converge.

Applications :

c) Soit w une suite complexe telle que $\sum w_n$ converge. Montrez que pour tout $a > 0$, la série $\sum \frac{w_n}{n^a}$ converge aussi.

d) Soit $a > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donnez la nature des séries $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^a}$, $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^a}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^a}$.

e) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \geq \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. Déterminez la nature des séries $\sum \frac{|\cos(n\theta)|}{n^a}$ et $\sum \frac{|\sin(n\theta)|}{n^a}$.

*****21)** Soit u une suite positive de limite nulle. On appelle U_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ et on suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - nu_n| \leq M$.

a) Montrez que pour tout $n \geq 2$, $\left| \frac{U_n}{n} - \frac{U_{n-1}}{n-1} \right| \leq M \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$

b) Montrez que la série $\sum u_n$ converge.

*****22)** Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série convergente à termes positifs.

a) Montrez que $\frac{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b) Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n}{n(n+1)}$ converge et montrez que sa somme est la même que celle de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

FAMILLES SOMMABLES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

+**23) La famille $\left(\frac{1}{pq(p+q)}\right)_{p,q \geq 1}$ est-elle sommable ?

+**24) Pour quelles valeurs de α la famille $((p+q)^\alpha)_{p,q \geq 1}$ est-elle sommable ?

**25) Soit $a > 1$. Montrez que la famille $\left(\frac{1}{a^p + a^q}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et justifiez que sa somme est inférieure ou égale à $\frac{a}{2(\sqrt{a}-1)^2}$. *Indication : remarquer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $2xy \leq x^2 + y^2$.*

+**26)

a) Soit $\alpha > 0$. Montrez que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^\alpha}{2^n}$ est convergente. On note $S(\alpha)$ sa somme.

b) En effectuant le changement d'indice $m = n - 1$, donnez la valeur de $S(1)$.

c) En vous inspirant de ce qui précède, donnez une expression de $S(2)$ en fonction de $S(1)$ et $S(0)$, puis sa valeur.

d) Montrez que la famille $\left(\frac{(-1)^{m+n}m}{2^{m+n}}\right)_{m,n \geq 0}$ est sommable et calculez sa somme.

+**27) Soit a un complexe tel que $|a| < 1$. En utilisant un produit de Cauchy, montrez que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n = \left(\frac{1}{1-a}\right)^2$.

+**28)

a) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}$, que vaut $\sum_{n=N}^{+\infty} z^n$?

b) Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. Montrez que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{1-x^{2p+1}}$.

+**29) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On rappelle que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

a) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$. Exprimez $\sum_{n=a}^{+\infty} \frac{1}{n(n+b)}$ en fonction de termes de la suite H .

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+m)} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln m}{m}$.

c) Montrez que la famille $\left(\frac{(-1)^m}{m(m+n^2)}\right)_{m,n \geq 1}$ est sommable.

d) Montrez que la famille $\left(\frac{(-1)^m}{m(m+n)(m+2n)}\right)_{m,n \geq 1}$ est sommable.

**30) Pour $n \geq 2$, on pose $P(n)$ le plus grand diviseur premier de n . On note $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$ la suite croissante des nombres premiers.

a) Montrez que pour tout $k \geq 3$, $p_{k-1} \leq p_k - 2$, puis $\frac{p_k}{p_k - 1} \leq \sqrt{\frac{p_k}{p_{k-1}}}$.

b) Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{nP(n)}$ converge (indication : penser à une sommation par paquets).

**31) Soit u une suite complexe.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $H_x = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > x\}$, son adhérence est $\overline{H_x} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq x\}$.

a) Montrez que s'il existe $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que la famille $\left(\frac{u_n}{n^{s_0}}\right)_{n \geq 1}$ est sommable, alors pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$, la famille $\left(\frac{u_n}{n^s}\right)_{n \geq 1}$ est sommable.

b) Quand la famille $\left(\frac{u_n}{n^s}\right)_{n \geq 1}$ est sommable, on pose $f_u(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n^s}$.

Montrez que l'ensemble de définition de f_u est, s'il est non vide, $\mathbb{C}$ ou un ensemble H_x ou un ensemble $\overline{H_x}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \{(d, d') \in \mathbb{N}^{*2} \mid dd' = n\}$. Montrez que $\mathbb{N}^{*2} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$.

d) Soit $(a_n), (b_n)$ deux suites complexes et $s \in \mathbb{C}$ telles que les familles $\left(\frac{a_n}{n^s}\right)_{n \geq 1}$ et $\left(\frac{b_n}{n^s}\right)_{n \geq 1}$ soient sommables.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}$. Montrez que la famille $\left(\frac{c_n}{n^s}\right)_{n \geq 1}$ est sommable et que $f_c(s) = f_a(s) \times f_b(s)$.

****32)** Cet exercice prolonge le précédent.

On rappelle la définition de l'indicatrice d'Euler : pour $n \in \mathbb{N}^*$, ϕ_n est le cardinal de $\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid k \wedge n = 1\}$.

On définit par récurrence la suite de Möbius : $\mu_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $\mu_n = - \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} \mu_d$.

Enfin, on note δ_n le nombre de diviseurs de n , σ_n la somme des diviseurs de n .

On pose $\zeta = f_1$, $\xi = f_\phi$ et $M = f_\mu$.

a) Montrez que l'ensemble de définition (au sens précédent) de ζ est H_1 . Montrez que ξ est définie sur H_2 .

b) On admet la relation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{d|n} \phi_d$. Donnez une relation valable sur H_2 liant les fonctions ξ et ζ . Justifiez alors que l'ensemble de définition de ξ est H_2 .

c) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mu_n| \leq 1$. Donnez une relation entre M et ζ , précisez l'ensemble de définition de M .

d) Déduisez-en la relation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\phi_n}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu_d}{d}$, en admettant l'unicité des coefficients u_n d'une fonction f_u .

e) Exprimez f_δ et f_σ en fonction de ζ , précisez les ensembles de définition.

Oraux de concours

- 1) Saint-Cyr** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{\ln n}{n}$. Déterminez la nature de la série $\sum u_n$. Donnez un équivalent de $\sum_{k=1}^n u_k$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- 2) IMT** Soit $\alpha > 0$. Donnez un équivalent de $\sum_{k=1}^n (\ln k)^\alpha$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- 3) CCINP** Soit u la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.
- Montrez que (u_n) converge et déterminez sa limite.
 - Déterminez la limite de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Déduisez-en un équivalent de u_n .
- 4) CCINP** Montrez que pour $n \geq 1$, l'équation $x^n + \sqrt{n}x - 1 = 0$ admet une unique racine x_n dans $[0, 1]$. Étudiez la suite (x_n) et montrez qu'elle converge vers 0. Trouvez un équivalent de x_n et étudiez la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} x_n$.
- 5) CCINP** Montrez que la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0, 1[$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$ converge vers 0 et donnez la nature de la série $\sum u_n$.
- 6) CCINP** Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$?
- 7) CCINP** Soit $x, y > 0$. Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) tels que la série $\sum \frac{x^n}{y^n + n^x}$ converge.
- 8) CCMP** Étudiez la convergence de la suite (a_n) définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$. Nature des séries $\sum (-1)^n a_n$ et $\sum a_n^2$. Nature de $\sum a_n$ (on pourra étudier $\sum \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$).
- 9) CCINP** Soit (a_n) une suite positive et (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}$.
- Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}$.
 - Montrez que si la série $\sum a_n$ converge, alors la suite (u_n) converge.
 - La réciproque est-elle vraie? Indication : considérer $u_n = \frac{n}{n+1}$.
- 10) IMT** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}u_n$. On pose $(v_n) = (n^2 u_n)$.
- Déterminez la nature de la série de terme général $\ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
 - Déduisez-en la nature de la série de terme général u_n .
- 11) CEN** Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ converge et donnez la valeur de sa somme. Montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{n^2}{(n^2 + 1)^2}$ converge et donnez une valeur de n pour que sa somme partielle soit une valeur approchée de sa somme à 10^{-4} près.
- 12) CEN**
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrez que la suite $(H_n - \ln n)_{n \geq 1}$ converge.
 - Déduisez de la question précédente la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
 - Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Calculez $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n}$.
- 13) CEN** Si (u_n) est une suite réelle telle que $u_0 = 0$, on pose alors $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n(u_n - u_{n-1})$.
- On note P_1 la propriété « la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge ».
- On note P_2 la propriété « il existe ℓ tel que $u_n \rightarrow \ell$ et $\sum (\ell - u_n)$ converge ».

- a) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \arctan(n^\alpha)$ pour $n \geq 1$, étudiez la véracité des propositions P_1 et P_2 .
- b) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle que $\sum a_n$ converge. Montrez que $\sum \frac{a_n}{n}$ converge et que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
- c) Comparez les propriétés P_1 et P_2 .
- 14) CCMP** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \{1/2\}$. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^\alpha}$ converge-t-elle?
- 15) CCMP** Soit $\alpha > 0$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.
- a) On suppose $\alpha > 1$. Montrez que $\sum_{k=1}^n R_k = (n+1)R_n + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^{\alpha-1}}$. Déduisez-en la convergence de la série $\sum R_n$.
- b) Étudiez le cas $\alpha \leq 1$.
- 16) CCMP** Soit $(a_n) \in \mathbb{R}_+^* \mathbb{N}^*$.
- a) On suppose que la série $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge. Montrez que la série $\sum a_n$ converge.
- b) On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrez que la série $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.
Vous introduirez, pour $\lambda > 1$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* / a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \lambda a_n\}$ et son complémentaire.
- c) Généralisez en remplaçant $a_n^{1-\frac{1}{n}}$ par $a_n^{1-b_n}$ avec une hypothèse adéquate sur la suite (b_n) .
- 17) CCMP** Soit f une permutation de $\mathbb{N}^*$. On pose $E(f) = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} / \sum \frac{f(n)}{n^\alpha} \text{ converge} \right\}$.
- a) Montrez que $E(f)$ peut être vide. Montrez dans le cas contraire que $E(f)$ est un intervalle minoré par 2 et non majoré.
- b) Soit $B \geq 2$. Montrez l'existence de f telle que $E(f) =]B, +\infty[$.
- 18) X** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.
- a) Montrez que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. On note ℓ sa limite.
- b) Montrez que $\ell = -(1 + \sqrt{2}) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.
- 19) X** Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente de réels.
- a) Montrez que pour tout réel $p \geq 1$, la série $\sum |x_n|^p$ converge.
- b) Déterminez la limite quand $p \rightarrow +\infty$, de $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p$.
- 20) X** Soit $\alpha > 0$ et (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Étudiez la convergence de la série $\sum u_n$.