FONCTIONS CONTINUES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)**

a) Montrez que la fonction $x \mapsto (x+1)\ln(2+\cos x)+x$ s'annule au moins une fois et donnez un encadrement d'une racine.

b) Montrez que la fonction $x \mapsto (x-1)^2 - 3\sin x$ s'annule au moins deux fois et qu'elle ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$.

c) Montrez que la fonction $u \mapsto \left(2+\sin\dfrac{u}{6}\right)\sin u$ prend une infinité de fois la valeur 1.

d) Montrez que la fonction $t \mapsto t^2 \sin t$ prend toute valeur réelle.

***2)** Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et $(p,q) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Montrez qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $(p+q)f(x_0) = pf(0)+qf(1)$.

***3)** Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ tel que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Montrez que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [a,b]$ a au moins une solution.

***4)** Soit f une fonction continue et positive sur $[0,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} < 1$. Montrez que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,+\infty[$ a au moins une solution.

****5)** Soit I un intervalle.

a) Soit f une fonction continue sur I telle que pour tout $x \in I$, $\sin(f(x)) = 0$. Montrez que f est constante.

b) Déterminez les applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et celles à valeurs dans $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

****6)** Résolvez l'équation $f^2 = \sin^2$ d'inconnue $f \in C^0([0,3\pi])$ (ensemble des fonctions continues sur $[0,3\pi]$).

****7)** Montrez que si f est une fonction continue sur $[a,+\infty[$ telle que $|f(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors f a une limite infinie en $+\infty$. Montrez que ce résultat est faux si on ne suppose pas f continue.

****8)** Soit f, g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que f ne s'annule pas sur $\mathring{I}$ et $|f| = |g|$ sur $\mathring{I}$. Montrez que $f = g$ sur I ou $f = -g$ sur I. Si on ne suppose plus que les fonctions sont continues ou que I est un intervalle, est-ce encore vrai ?

****9)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f$ a un point fixe. Montrez que f en possède un aussi.

****10)** Soit $f : t \mapsto t^4 - \dfrac{1}{t^2}$.

a) Montrez que la fonction f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On note φ la réciproque de cette bijection.

b) Que vaut $\varphi(0)$? Donnez l'allure de la courbe de φ.

c) Montrez que $\varphi(x) \sim \sqrt[4]{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

d) Donnez un équivalent de $\varphi(x) - \sqrt[4]{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

****11)** Soit $f : z \mapsto 2z^3 + z^2 + z$.

a) Montrez que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g la réciproque.

b) Déterminez tous les réels $a > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|g(y)| \leqslant a|y|$.

****12)** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^3+e^y, y^3+e^x) \end{array}$. Montrez que f est surjective.

****13)** Montrez que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & ze^z \end{array}$ est surjective.

****14)** Soit f une fonction continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = x^n$ d'inconnue $x \in [0,1]$ a une unique solution, qu'on note u_n. On définit ainsi une suite (u_n).

b) Montrez que la suite u est croissante, puis qu'elle converge. On note ℓ sa limite.

c) Montrez par l'absurde que $\ell = 1$.

****15)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$.

a) Montrez que f est strictement monotone.

b) Montrez que f est bijective.

Application :

déterminez les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$.

****16)** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$.

****17)** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et pour tout $x \in \left[0, \dfrac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \dfrac{3}{10}\right) \neq f(x)$. Montrez que f s'annule au moins 7 fois sur $[0,1]$. Donnez un exemple d'une telle fonction.

*****18)** Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f(0) < f(1)$ et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f \circ f \circ \cdots \circ f = Id_{[0,1]}$, composée de f par elle-même n fois. Montrez que f est l'application identité sur $[0,1]$.

***19)** Soit f, g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f soit bornée et g continue. Montrez que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

***20)** Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et périodique. Montrez que f est bornée sur $\mathbb{R}$. Est-ce encore vrai si on ne suppose pas f continue ?

****21)** Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et ayant des limites réelles en $+\infty$ et en $-\infty$.

a) En considérant la fonction $g = f \circ \tan$, montrez que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Redémontrez le résultat directement.

c) Peut-on dire que f atteint ses bornes ? Au moins l'une des deux ?

****22)** Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue et ayant pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrez que f est minorée sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet un minimum.

****23)** Soit f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) > g(t)$. Montrez qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) > g(t) + m$. Montrez que ce résultat est faux sur $]0,1]$ ou sur $[1, +\infty[$.

****24)** Soit f, g deux applications lipschitziennes sur un intervalle I.

a) Montrez que $f + g$ est lipschitzienne.

b) Montrez que si f et f sont bornées, alors fg est lipschitzienne sur I. Ce résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas f et g bornées ?

c) Si I est un segment, que dire du produit fg ?

d) Montrez que si I est un segment et f ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{f}$ est lipschitzienne sur I.

****25)** Soit f une fonction K-lipschitzienne sur $I =]a, \ldots)$. On pose $g : x \mapsto f(x) + (K+1)x$.

a) Montrez que g est croissante sur I.

b) On choisit $x_0 \in I$. Montrez que g est bornée sur $]a, x_0]$.

c) Déduisez-en que f est prolongeable par continuité en a à droite.

****26)** Soit f une fonction K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et $L > K$. On pose $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (Lx + f(y), Ly + f(x)) \end{array}$.

Montrez que F est bijective.

*****27)** Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f \circ f = f$. Montrez que l'ensemble des points fixes de f est un segment. Donnez l'allure générale de la courbe de f.

*****28)** Soient $f, g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ deux fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrez qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.