L'usage des calculatrices est interdit

Ce sujet est sans doute **trop long** pour être traité dans sa totalité. Alors n'essayez pas de tout faire, en revanche visez **l'excellence de vos réponses**. Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et repérez les questions qui vous semblent faciles ou presque pour vous. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour faire les suivantes en l'indiquant sur votre copie par égard pour le correcteur. En fin d'épreuve, les questions que vous aviez repérées comme faciles devraient avoir été traitées, sauf si elles n'étaient pas si faciles finalement.

Écrivez lisiblement, soignez la présentation, efforcez-vous de faciliter la vie du correcteur. **Il est hors de question d'obliger le correcteur à refaire votre raisonnement ou vos calculs** : votre rédaction doit comporter suffisamment de détails pour que le correcteur lise sans trop réfléchir.

Problème 1 - Valeurs de deux cosinus

On veut calculer les valeurs de cos en $\dfrac{2\pi}{5}$ et en $\dfrac{4\pi}{5}$.

On pose $\theta = \dfrac{2\pi}{5}$, $x = \cos\theta$, $y = \cos 3\theta$ et $s = x + y$, $p = x \times y$.

Question 1) Justifiez soigneusement les égalités suivantes : $x = \cos 4\theta = \cos 6\theta$, $y = \cos 2\theta$.

Question 2) Montrez : $-2 < s < 2$.

Question 3) Montrez que $s = 2p$.

Question 4) Montrez que $2s^2 - 3s - 2 = 0$. Déduisez-en les valeurs de s et p.

Question 5) Montrez que $x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} = 0$. Concluez l'exercice en donnant les valeurs de x et y.

Problème 2 - Une équation du troisième degré

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation (E) : $8t^3 + 12t^2 - (2 + \sqrt{3}) = 0$, d'inconnue t réelle.

Question 1) Soit θ un réel : donnez une expression de $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ uniquement.

Question 2) Soit a un réel. Effectuez le changement de variable $t = u + a$ dans (E). Vous obtenez une nouvelle équation (F) de degré 3 d'inconnue u, dont les coefficients dépendent de a.

Question 3) Quelle valeur de a faut-il choisir pour que l'équation (F) ne comporte pas de terme de degré 2 ? Désormais on fait ce choix. Avec la valeur de a que vous venez de trouver, finissez le calcul concret des coefficients de l'équation (F).

Question 4) On pose $f : u \mapsto 8u^3 - 6u - \sqrt{3}$. Dressez le tableau de variations de f et montrez que l'équation (F) a exactement 3 racines réelles, qui sont comprises entre -1 et 1.

Question 5) Puisque les racines de (F) sont dans $[-1, 1]$, on peut les écrire sous la forme $u = \cos\theta$. Résolvez l'équation (F), puis donnez les solutions de l'équation (E).

Problème 3 - Équations fonctionelles

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}$.

On rappelle qu'on dit que f est impaire quand pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = -f(t)$.

Question préliminaire Montrez que f est impaire si et s.si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x^2) = -f(x^2)$.

Partie 1

Dans cette partie, on résout le problème (A) : on cherche les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (f(x + y))^2 = (f(x) + \sqrt{y})^2 - 2f(x)f(y)$$

Question 1) Calculez $f(0)$.

Question 2) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)^2 = x$.

Question 3) On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $f(a) = -\sqrt{a}$. En calculant $f(2a)$, aboutissez à une contradiction et concluez une propriété à propos de f.

Question 4) Donnez toutes les solutions du problème (A).

Partie 2

Dans cette partie, on résout le problème (B) : on cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x^2 - y^2) = (x-y)\Big(f(x) + f(y)\Big)$$

Question 1) Calculez $f(0)$.

Question 2) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x^2) = -xf(x)$. Déduisez-en que f est impaire (vous pourrez utiliser la question préliminaire).

Question 3) Montrez que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a aussi $f(x^2 - y^2) = (x+y)\Big(f(x) - f(y)\Big)$.

Question 4) Montrez alors que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $yf(x) = xf(y)$.

Question 5) Que pouvez-vous en déduire à propos de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$?

Question 6) Donnez toutes les solutions du problème (B).

Problème 4 - $\dfrac{\pi}{9}$

Ce problème est laissé à votre sagacité, les questions sont peu guidées. Donc ce n'est sans doute pas par ce bout qu'il faut commencer votre rédaction.

Question 1) On note $s_1 = \cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9}$.

Montrez que $s_1 = 0$ en vous servant habilement de la formule $\cos p + \cos q = \ldots$

Question 2) On note $s_2 = \cos^2\dfrac{2\pi}{9} + \cos^2\dfrac{4\pi}{9} + \cos^2\dfrac{8\pi}{9}$.

Donnez la valeur de s_2 : vous trouverez un rationnel très simple.

Question 3) On note $s_3 = \cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9}\cos\dfrac{8\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}$.

Donnez la valeur de s_3, en vous servant par exemple des deux questions précédentes.

Question 4) On note $p = \cos\dfrac{2\pi}{9} \times \cos\dfrac{4\pi}{9} \times \cos\dfrac{8\pi}{9}$.

Montrez que $\sin\dfrac{2\pi}{9} \times p = \dfrac{1}{8}\sin\dfrac{16\pi}{9}$ et déduisez-en la valeur de p.

Question 5) Montrez que les trois réels $\cos\dfrac{2\pi}{9}$, $\cos\dfrac{4\pi}{9}$ et $\cos\dfrac{8\pi}{9}$ sont les trois racines de l'équation $x^3 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{8} = 0$.

Problème 1

Question 1) On remarque que $4\theta = 2\pi - \theta$ donc $\cos(4\theta) = \cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos(\theta) = x$, car la fonction cos est 2π-périodique et paire.

De même, $3\theta = 2\pi - 2\theta$ donc le même raisonnement conduit à $\cos(2\theta) = y$.

De même, $6\theta = 2\pi + \theta$ donc $\cos(6\theta) = \cos(2\pi + \theta) = \cos(\theta) = x$.

Question 2) $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\theta = x \in]0,1[$. Or $y \in [-1,1]$ donc $s = x + y \in]-1,2[$.

Question 3) $s = \cos\theta + \cos 3\theta = 2\cos\left(\dfrac{3\theta+\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3\theta-\theta}{2}\right)$ par application de la formule de trigonométrie $\cos p + \cos q$.

Donc d'après la question 1, $s = 2\cos(2\theta) \times \cos(\theta) = 2\cos(3\theta) \times \cos(\theta) = 2xy = 2p$.

Question 4) $s^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \cos^2(\theta) + \cos^2(3\theta) + 2p = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2} + \dfrac{1+\cos(6\theta)}{2} + s$, par application de la formule de duplication $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ donc dans l'autre sens, $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$.

Donc d'après la question 1, $s^2 = 1 + \dfrac{y+x}{2} + s = 1 + \dfrac{3}{2}s$, donc $2s^2 = 2 + 3s$ donc $2s^2 - 3s - 2 = 0$.

Cette équation a deux solutions qui sont 2 et $\dfrac{-1}{2}$. Or on sait d'après la question 2 que $s < 2$, donc il vient $s = \dfrac{-1}{2}$, et donc $p = \dfrac{-1}{4}$.

Question 5) On sait donc que $x + y = \dfrac{-1}{2}$ donc $y = \dfrac{-1}{2} - x$. Or $p = xy = \dfrac{-1}{4}$ donc $x \times \left(\dfrac{-1}{2} - x\right) = \dfrac{-1}{4}$, autrement dit $x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} = 0$.

Cette équation a deux solutions qui sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$, la première positive, la seconde négative.

Or on a dit en question 2 que $x > 0$, donc on obtient $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos(\theta)$.

Si maintenant on écrit x en fonction de y, on constate que y satisfait la même équation. Mais bien sûr, $x \neq y$, donc il vient $y = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} = \cos(2\theta)$.

Problème 2

Question 1) $\cos(3\theta) = \cos(\theta + 2\theta) = \cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta) = \cos(\theta) \times (2\cos(\theta)^2 - 1) - \sin(\theta) \times 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
$= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\cos(\theta)\sin^2(\theta) = 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\cos(\theta) \times (1 - \cos^2(\theta))$

Donc $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.

Question 2) $t = u + a$ donc $t^2 = u^2 + 2au + a^2$ et $t^3 = u^3 + 3au^2 + 3a^2u + a^3$, donc on remplace dans l'équation (E), on obtient l'équation (F) : $8(u^3 + 3au^2 + 3a^2u + a^3) + 12(u^2 + 2au + a^2) - (2 + \sqrt{3}) = 0$.

On développe et on réordonne : $8u^3 + (24a + 12)u^2 + (24a^2 + 24a)u + (8a^3 + 12a^2 - 2 - \sqrt{3}) = 0$.

Question 3) On choisit a tel que $24a + 12 = 0$, c'est-à-dire $a = \dfrac{-1}{2}$. L'équation (F) est donc $8u^3 - 6u - \sqrt{3} = 0$.

Question 4) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et pour tout $u \in \mathbb{R}$, $f'(u) = 24u^2 - 6$. L'équation $f'(u) = 0$ a pour racines $\dfrac{-1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$. Le signe de $f'(u)$ est classique (signe d'un trinôme du second degré).

u	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(u)$			$2-\sqrt{3}$				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-2-\sqrt{3}$	$\nearrow$	

Comme $2-\sqrt{3}>0$, sur l'intervalle $]-\infty,-1/2]$, la fonction f est continue, strictement croissante et change de signe, donc d'après le th. de la valeur intermédiaire, l'équation $f(u)=0$ a une unique solution dans l'intervalle $]-\infty,-1/2]$.

De plus, $f(-1)=-2-\sqrt{3}<0$, donc cette racine est strictement comprise entre -1 et $-1/2$.

On procède de même sur les deux intervalles $[-1/2,1/2]$ et sur $[1/2,+\infty[$. Et comme $f(1)=2-\sqrt{3}>0$, au total, on a trois racines, toutes comprises entre -1 et 1.

Question 5) On veut donc résoudre l'équation $8\cos^3(\theta)-6\cos(\theta)=\sqrt{3}$, ce qui revient à $4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ou encore $\cos(3\theta)=\cos\dfrac{\pi}{6}$.

$$\text{Or } \cos(3\theta)=\cos\frac{\pi}{6} \iff \begin{cases} 3\theta\equiv\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3\theta\equiv-\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \theta\equiv\dfrac{\pi}{18}\ \left[\dfrac{2\pi}{3}\right] \\ \text{ou} \\ \theta\equiv-\dfrac{\pi}{18}\ \left[\dfrac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$

Ce qu'on veut, ce sont les valeurs de $\cos\theta$:

— modulo 2π, la première congruence donne trois valeurs pour θ qui sont $\dfrac{\pi}{18}$, $\dfrac{13\pi}{18}$ et $\dfrac{25\pi}{18}$;

— modulo 2π, la première congruence donne trois valeurs pour θ qui sont $\dfrac{-\pi}{18}$, $\dfrac{-13\pi}{18}$ et $\dfrac{-25\pi}{18}$.

Mais comme cos est paire, on obtient finalement 3 valeurs pour $\cos\theta$, qui sont $\cos\dfrac{\pi}{18}$, $\cos\dfrac{13\pi}{18}$ et $\cos\dfrac{25\pi}{18}$.

Conclusion : l'équation (F) a pour solutions les trois réels $u_1=\cos\dfrac{\pi}{18}$, $u_2=\cos\dfrac{13\pi}{18}$ et $u_3=\cos\dfrac{25\pi}{18}$.

Puis en revenant à la lettre $t=u-\dfrac{1}{2}$, l'équation (E) a trois solutions qui sont $t_1=\dfrac{-1}{2}+\cos\dfrac{\pi}{18}$, $t_2=\dfrac{-1}{2}+\cos\dfrac{13\pi}{18}$ et $t_3=\dfrac{-1}{2}+\cos\dfrac{25\pi}{18}$.

Problème 3

Si f est impaire, alors pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(-t)=-f(t)$, donc en spécialisant $t\leftarrow x^2$, on obtient en particulier pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x^2)=-f(x^2)$.

Réciproquement, si pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x^2)=-f(x^2)$, alors comme tout réel positif peut s'écrire sous la forme x^2, ceci prouve que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $f(-t)=-f(t)$.

Puis, pour $t<0$, on pose $u=-t>0$, donc $f(-t)=f(u)=-f(-u)=-f(t)$ d'après ce qui précède.

On a donc montré que dans tous les cas, c'est-à-dire pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(-t)=-f(t)$.

Donc f est impaire.

Partie 1

Question 1) On spécialise $x\leftarrow 0$ et $y\leftarrow 0$: $f(0)^2=f(0)^2-2f(0)^2$ donc $f(0)^2=0$ donc $f(0)=0$.

Question 2) On spécialise $x\leftarrow 0$: pour tout $y\in\mathbb{R}_+$, $f(y)^2=(f(0)+\sqrt{y})^2-2f(0)f(y)$, or $f(0)=0$ donc pour tout $y\in\mathbb{R}_+$, $f(y)^2=(\sqrt{y})^2=y$.

Question 3) S'il existe $a>0$ tel que $f(a)=-\sqrt{a}$, alors en spécialisant encore $x\leftarrow a$ et $y\leftarrow a$, on obtient $f(2a)^2=(f(a)+\sqrt{a})^2-2f(a)^2=(-\sqrt{a}+\sqrt{a})^2-2(-\sqrt{a})^2=-2a$.

Or on sait d'après la question précédente que $f(2a)^2 = 2a$, donc il vient $2a = -2a$ donc $a = 0$: contradiction car $a > 0$.

Conclusion : pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f(a) \neq -\sqrt{a}$.

Question 4) D'après la question 2, on doit avoir : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)^2 = x$ donc $f(x) = \sqrt{x}$ ou $f(x) = -\sqrt{x}$.

Dans le cas où $x = 0$, ça donne la même chose : $f(0) = 0$, ce qu'on savait déjà.

Mais dans le cas où $x > 0$, on vient de montrer que la deuxième possibilité est contradictoire, donc on obtient : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \sqrt{x}$.

On vient donc de montrer que si f est solution, alors f est la fonction racine carrée.

Réciproquement, on vérifie qu'elle convient, car on a bien pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $\left(\sqrt{x+y}\right)^2 = x + y = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{x}\,\sqrt{y}$.

Conclusion : la seule solution du problème est la fonction racine carrée.

Partie 2

Question 1) On spécialise $x \leftarrow 0$ et $y \leftarrow 0$: $f(0) = (0 - 0) \times 2f(0) = 0$.

Question 2) On spécialise $x \leftarrow 0$: pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(-y^2) = (0-y) \times (f(0)+f(y))$, or $f(0) = 0$ donc $f(-y^2) = -yf(y)$.

On spécialise $y \leftarrow 0$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x^2) = (x - 0) \times (f(x) + f(0))$, or $f(0) = 0$ donc $f(x^2) = xf(x)$.

On a donc montré : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x^2) = -xf(x) = -f(x^2)$. D'après la question préliminaire, f est impaire.

Question 3) On spécialise $y \leftarrow -y$: pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x^2 - (-y)^2) = (x - (-y)) \times (f(x) + f(-y))$, or f est impaire, donc $f(x^2 - y^2) = (x + y) \times (f(x) - f(y))$.

Question 4) On a donc simultanément :

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x^2 - y^2) = (x - y) \times (f(x) + f(y)) = (x + y) \times (f(x) - f(y))$

donc en développant, $xf(x) + xf(y) - yf(x) - yf(y) = xf(x) - xf(y) + yf(x) - yf(y)$,

donc $2xf(y) = 2yf(x)$, finalement $xf(y) = yf(x)$.

Question 5) La question précédente prouve que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{*2}$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(y)}{y}$ en divisant par xy.

Ceci signifie que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est constante sur $\mathbb{R}^*$.

Question 6) La question précédente (et le fait que $f(0) = 0$) montre que si f est solution du problème, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = kx$.

Réciproquement, pour n'importe quelle valeur de k, cette fonction est bien solution, car $k(x^2 - y^2) = (x - y) \times (kx + ky)$.

Conclusion : les solutions du problème sont les fonctions $x \mapsto kx$ où k est une constante arbitraire.

Problème 4

Question 1) $\cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9} = 2\cos\dfrac{\frac{8\pi}{9} + \frac{2\pi}{9}}{2}\cos\dfrac{\frac{8\pi}{9} - \frac{2\pi}{9}}{2} = 2\cos\dfrac{5\pi}{9}\cos\dfrac{3\pi}{9}$.

Or $\dfrac{3\pi}{9} = \dfrac{\pi}{3}$ donc $\cos\dfrac{3\pi}{9} = \dfrac{1}{2}$. De plus, $\dfrac{5\pi}{9} = \pi - \dfrac{4\pi}{9}$ donc $\cos\dfrac{5\pi}{9} = -\cos\dfrac{4\pi}{9}$.

Donc $\cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9} = -\cos\dfrac{4\pi}{9}$, autrement dit $s_1 = 0$.

Question 2) On sait que $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$. Donc $s_2 = \dfrac{1}{2}(3 + \cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9} + \cos\dfrac{16\pi}{9})$.

Or $\dfrac{16\pi}{9} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{9}$ donc $\cos\dfrac{16\pi}{9} = \cos\dfrac{2\pi}{9}$, donc il vient $s_2 = \dfrac{1}{2}(3 + s_1) = \dfrac{3}{2}$.

Question 3) Un simple calcul (développement d'un carré d'une somme) montre que $s_1^2 = s_2 + 2s_3$. Donc $s_3 = \dfrac{-1}{2}s_2 = \dfrac{-3}{4}$.

Question 4) On sait que $\sin a \cos a = \dfrac{1}{2}\sin(2a)$. En particulier, $\sin\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{4\pi}{9}$.

Donc $\sin\dfrac{2\pi}{9} \times p = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{4\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}\cos\dfrac{8\pi}{9} = \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{8\pi}{9}\cos\dfrac{8\pi}{9} = \dfrac{1}{8}\sin\dfrac{16\pi}{9}$.

Or $\dfrac{16\pi}{9} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{9}$ donc $\sin\dfrac{16\pi}{9} = -\sin\dfrac{2\pi}{9}$, donc il vient $\sin\dfrac{2\pi}{9} \times p = \dfrac{-1}{8}\sin\dfrac{2\pi}{9}$.
Et comme $\sin\dfrac{2\pi}{9} \neq 0$, on en déduit $p = \dfrac{-1}{8}$.

Question 5) Les trois réels $\cos\dfrac{2\pi}{9}$, $\cos\dfrac{4\pi}{9}$ et $\cos\dfrac{8\pi}{9}$ sont les trois racines de l'équation

$$\left(x - \cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(x - \cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(x - \cos\frac{8\pi}{9}\right) = 0$$

En développant, on trouve l'équation $x^3 - s_1x^2 + s_3x - p = 0$, c'est-à-dire $x^3 - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{8} = 0$.