

Td 3

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $Q = f(P)$ le polynôme tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$.
- Montrer que f est un endomorphisme de E .
 - Calculer le déterminant de f : f est-il un automorphisme ?
 - On pose $g = f - \text{Id}_E$. Montrer que pour tout $P \in E$, $\deg(g(P)) < \deg P$. En déduire un polynôme annulateur de f .
- 2) Montrer que $\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln 2$.
- 3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto x^3 - nx + n$.
- Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 , l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet deux solutions $a_n < b_n$.
On définit ainsi les suites $a = (a_n)_{n \geq n_0}$ et $b = (b_n)_{n \geq n_0}$.
 - Montrer que la suite b diverge vers $+\infty$, puis que $b_n \sim \sqrt{n}$.
 - Montrer que la suite a converge vers 1.
 - Montrer que $a_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
- 4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $U_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des 0 et des 1. Pour $A \in U_n(\mathbb{R})$, on note $u(A)$ le nombre de 1.
- Montrer que pour tout $A \in U_n(\mathbb{R})$, $n \leq u(A) \leq n^2 - n + 1$.
 - Montrer que l'application u de $U_n(\mathbb{R})$ dans $\{n, n+1, \dots, n^2 - n + 1\}$ est surjective.
- 5)
- Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(3 + 4i)^n = a_n + ib_n$.
 - Montrez que le complexe $\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$ n'est jamais une racine n -ème de l'unité.

Td 3

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $Q = f(P)$ le polynôme tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$.
- Montrer que f est un endomorphisme de E .
 - Calculer le déterminant de f : f est-il un automorphisme ?
 - On pose $g = f - \text{Id}_E$. Montrer que pour tout $P \in E$, $\deg(g(P)) < \deg P$. En déduire un polynôme annulateur de f .
- 2) Montrer que $\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln 2$.
- 3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto x^3 - nx + n$.
- Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 , l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet deux solutions $a_n < b_n$.
On définit ainsi les suites $a = (a_n)_{n \geq n_0}$ et $b = (b_n)_{n \geq n_0}$.
 - Montrer que la suite b diverge vers $+\infty$, puis que $b_n \sim \sqrt{n}$.
 - Montrer que la suite a converge vers 1.
 - Montrer que $a_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
- 4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $U_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des 0 et des 1. Pour $A \in U_n(\mathbb{R})$, on note $u(A)$ le nombre de 1.
- Montrer que pour tout $A \in U_n(\mathbb{R})$, $n \leq u(A) \leq n^2 - n + 1$.
 - Montrer que l'application u de $U_n(\mathbb{R})$ dans $\{n, n+1, \dots, n^2 - n + 1\}$ est surjective.
- 5)
- Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(3 + 4i)^n = a_n + ib_n$.
 - Montrez que le complexe $\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$ n'est jamais une racine n -ème de l'unité.