

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt$ quand cette intégrale a un sens.

Q 1. Déterminez l'ensemble de définition I de la fonction f .

Q 2.

a) Montrez que pour tout $x \in I$, $f(x) = 2x(f(x) - f(x+1))$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déduisez-en une expression de $f(n)$ à l'aide de factorielles et de puissances de 2.

Q 3. Montrez que f est monotone sur I , puis à l'aide de ce qui précède, montrez que f a pour limite 0 en $+\infty$.

On admet que f est continue sur I .

Q 4. Donnez un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$, puis la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Q 5. Donnez un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 1/2$, puis la nature de l'intégrale $\int_{1/2}^1 f(x) dx$.

Exercice hebdomadaire 3 - Corrigé

Q 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x}$ est continue sur $[0, +\infty[$: une étude en $+\infty$ suffit.

Quand $t \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{(1+t^2)^x} \sim \frac{1}{t^{2x}}$ et ces fonctions sont positives, donc les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}} dt$ sont de même nature. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}} dt$ converge si et s.si $2x > 1$, donc $I =]1/2, +\infty[$.

Q 2.

a) Soit $X > 1$. On effectue une intégration par parties sur l'intégrale $\int_0^X \frac{1}{(1+t^2)^x} dt$:

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{1}{(1+t^2)^x} dt &= \left[t \times \frac{1}{(1+t^2)^x} \right]_{t=0}^X + 2x \int_0^X \frac{t^2}{(1+t^2)^{x+1}} dt = X \times \frac{1}{(1+X^2)^x} + 2x \int_0^X \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{x+1}} dt \\ &= X \times \frac{1}{(1+X^2)^x} + 2x \left(\int_0^X \frac{1}{(1+t^2)^x} dt - \int_0^X \frac{1}{(1+t^2)^{x+1}} dt \right). \end{aligned}$$

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} X \times \frac{1}{(1+X^2)^x} = 0$ car $X \times \frac{1}{(1+X^2)^x} \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{X^{2x-1}}$, donc par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient

$$f(x) = 2x(f(x) - f(x+1))$$

b) Par récurrence, on montre que $f(n) = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!^2} \times \frac{\pi}{2}$, car $f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_{t=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

Q 3. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \leq y$. Alors pour tout $t \geq 0$, $\ln(1+t^2) \geq 0$, donc $x \ln(1+t^2) \leq y \ln(1+t^2)$ donc $(1+t^2)^x = e^{x \ln(1+t^2)} \leq (1+t^2)^y$, donc $\frac{1}{(1+t^2)^x} \leq \frac{1}{(1+t^2)^y}$. Donc par croissance de l'intégrale, $f(y) \leq f(x)$.

La fonction f est donc décroissante sur I . Comme elle est clairement positive, elle admet une limite réelle ℓ en $+\infty$ (th. de la limite monotone). En particulier, $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

D'après la question **Q 2b** et la formule de Stirling, $f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n-2)} \left(\frac{2n-2}{e}\right)^{2n-2}}{2\pi(n-1) \left(\frac{n-1}{e}\right)^{2n-2}} \times \frac{\pi}{2^{2n-2} \times 2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$, ce qui permet de conclure que $\ell = 0$.

Q 4. Pour $x > 1$, on pose $n = \lfloor x \rfloor$, de sorte que $n \leq x < n+1$. Comme f est décroissante sur I , $f(n) \leq f(x) \leq f(n+1)$.

Or quand $x \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$ et $f(n) \sim f(n+1) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. Donc par encadrement, $f(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{1/2}}$.

Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

Q 5. D'après **Q 2a**, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{2x}{2x-1} f(x+1)$. Or f est continue sur I donc $\lim_{x \rightarrow 1/2} 2xf(x+1) = f(3/2) > 0$

(par th. de stricte positivité de l'intégrale). Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 1/2}{\sim} \frac{f(3/2)}{2x-1}$. Or l'intégrale $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x-\frac{1}{2}} dx$ diverge, donc par

comparaison entre fonctions positives, l'intégrale $\int_{1/2}^1 f(x) dx$ diverge.