

## Td 2

- 1) Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 + f = 0$  et  $f \neq 0$ .
- Montrez que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ . Précisez les dimensions des deux noyaux précédents.
  - Soit  $x \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$  non nul. Montrez que  $(x, f(x))$  est libre.
  - Montrez qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .
  - Construisez un endomorphisme  $u$  tel que  $u^2 = f$ .
- 2) Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle strictement positive et bornée telle que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  diverge. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n$  la somme partielle d'indice  $n$  de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$ .
- Montrez que  $\frac{u_n}{S_n} \sim \ln \left( \frac{S_n}{S_{n-1}} \right)$ . Déduisez-en la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n}$ .
  - Étudiez la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$  quand  $\alpha \in ]0, 1[$ .
  - Soit  $\alpha > 1$ . Montrez que  $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha} dx$ . Déduisez-en la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ .
- 3) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$ .
- Montrez que la suite  $(u_n)$  converge puis que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$  et déduisez-en la limite de  $(u_n)$ .
  - Donnez un équivalent simple de  $(u_n)$ , puis un développement asymptotique à deux termes.
- 4) Déterminez les entiers  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $(X^2 + X + 1)^2$  divise  $(X + 1)^n - X^n - 1$ .

## Td 2

- 1) Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 + f = 0$  et  $f \neq 0$ .
- Montrez que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ . Précisez les dimensions des deux noyaux précédents.
  - Soit  $x \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$  non nul. Montrez que  $(x, f(x))$  est libre.
  - Montrez qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .
  - Construisez un endomorphisme  $u$  tel que  $u^2 = f$ .
- 2) Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle strictement positive et bornée telle que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  diverge. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n$  la somme partielle d'indice  $n$  de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$ .
- Montrez que  $\frac{u_n}{S_n} \sim \ln \left( \frac{S_n}{S_{n-1}} \right)$ . Déduisez-en la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n}$ .
  - Étudiez la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$  quand  $\alpha \in ]0, 1[$ .
  - Soit  $\alpha > 1$ . Montrez que  $\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^\alpha} dx$ . Déduisez-en la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ .
- 3) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$ .
- Montrez que la suite  $(u_n)$  converge puis que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$  et déduisez-en la limite de  $(u_n)$ .
  - Donnez un équivalent simple de  $(u_n)$ , puis un développement asymptotique à deux termes.
- 4) Déterminez les entiers  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $(X^2 + X + 1)^2$  divise  $(X + 1)^n - X^n - 1$ .