

Td 1

1) Montrez que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\ln(1+t)}$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $] -1, +\infty[$.

2) Soit u une suite strictement positive telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$.

- a) Montrez que la suite u est monotone à partir d'un certain rang et converge vers 0.
- b) Montrez alors qu'il existe $M > 0$, $k \in]0, 1[$ et un rang n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M \times k^n$.
- c) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$?

3) Soit E un K -e.v. de dimension 3, $f \in L(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

- a) Montrez que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$, déduisez-en les dimensions de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$.
- b) Montrez qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Soit $z = e^{2i\pi/7}$.

Soit $s = z + z^2 + z^4$, $t = z^3 + z^5 + z^6$. Calculez $s + t$ et st , déduisez-en les valeurs de s et t .

5) Soit a, b deux réels, f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = ax + b$. Déterminez la fonction f .

Td 1

1) Montrez que la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\ln(1+t)}$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $] -1, +\infty[$.

2) Soit u une suite strictement positive telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$.

- a) Montrez que la suite u est monotone à partir d'un certain rang et converge vers 0.
- b) Montrez alors qu'il existe $M > 0$, $k \in]0, 1[$ et un rang n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M \times k^n$.
- c) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$?

3) Soit E un K -e.v. de dimension 3, $f \in L(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

- a) Montrez que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$, déduisez-en les dimensions de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$.
- b) Montrez qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Soit $z = e^{2i\pi/7}$.

Soit $s = z + z^2 + z^4$, $t = z^3 + z^5 + z^6$. Calculez $s + t$ et st , déduisez-en les valeurs de s et t .

5) Soit a, b deux réels, f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = ax + b$. Déterminez la fonction f .