

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Montrez la convergence des intégrales suivantes et calculez leurs valeurs.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx & \text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+x^2+x+1} dx \\ \text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} dx & \text{d) } \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx \\ \text{e) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt & \text{f) } \int_0^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t)) dt \end{array}$$

***2)** Justifiez les convergences des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} x} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx$ et donnez leurs valeurs en vous servant de l'égalité $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

***3)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$ converge et donnez sa valeur en faisant le changement de variable $y = 1/x$.

***4)** Soit $a < b$ deux réels.

- a) Déterminez une application affine φ envoyant l'intervalle $] -1, 1[$ sur $]a, b[$.
b) Déduisez-en la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$.

****5)** Montrez la convergence des intégrales suivantes et calculez leurs valeurs.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx & \text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} dx & \text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2} dx \text{ (où } a > 0) \\ \text{d) } \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx & \text{e) } \int_0^1 \frac{\ln(1+3x^2)}{x^2} dx & \text{f) } \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx \end{array}$$

****6)** On pose $C = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$ et $S = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ et $I = \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt$.

- a) Justifiez l'existence de ces trois intégrales.
b) Montrez que $C = S$.
c) Montrez que $I = 2S$ et donnez une autre relation liant $C + S$ et I .
d) Donnez la valeur des trois intégrales.

****7)** Justifiez l'existence des intégrales suivantes, puis par le changement de variable $x = \sin(t)$, montrez que

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2(t)} dt.$$

Effectuez le changement de variable $u = \tan(t)$ dans la dernière intégrale afin d'obtenir sa valeur.

****8)** On considère l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$.

- a) Justifiez que I est convergente.
b) Démontrez que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad t - \frac{t^3}{6} \leq \sin(t) \leq t$. Déduisez-en $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.
c) Montrez que : $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_y^{3y} \frac{\sin t}{t^2} dt = 0$.
d) Linéarisez $\sin^3(t)$. Déduisez de tout ce qui précède la valeur de I .

****9)**

- a) Soit $a > 0$. Montrez que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^a} dt$ converge si et s.si $a < 2$.
b) Montrez que les intégrales suivantes convergent : $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$, $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$, $\int_0^{+\infty} \sin(e^x) dx$.

****10)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ converge. Soit $0 < a < b$.

- a) Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$.
- b) Dédisez-en que $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ converge et vaut $f(0) \ln \frac{b}{a}$.

****11)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et ayant une limite réelle ℓ en $+\infty$. Soit $a > 0$.

Montrez que $\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(ax)}{x} dx$ converge et donnez sa valeur en fonction de ℓ , $f(0)$ et a .

****12)** Fonction Γ d'Euler.

Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- a) Montrez que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
- b) Donnez une relation de récurrence entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$. Dédisez-en la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

****13)** Une idée fausse : beaucoup pensent que si f est positive et intégrable sur $[0, +\infty[$, alors f a pour limite 0 en $+\infty$.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ de la façon suivante : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{1}{2n^2}$ puis

pour $x \geq 0$,

- ▷ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n - a_n \leq x \leq n$, $f(x) = 2n^2(x - n) + 1$
- ▷ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \leq x \leq n + a_n$, $f(x) = -2n^2(x - n) + 1$
- ▷ $f(x) = 0$ dans les autres cas.

Représentez la courbe de f sur $[0; 4, 5]$, montrez que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ mais que f n'a pas de limite en $+\infty$.

****14)** Déterminez la nature des intégrales suivantes ($\alpha > 0$) :

- a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + |\sin x|} dx$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1 + \sin^2 x)} dx$ c) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$
- d) $\int_0^1 e^{-1/t} dt$ e) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}} dx$ f) $\int_0^{+\infty} e^{-(\ln x)^2} dx$
- g) $\int_0^1 \sin(\ln t) dt$ h) $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^{3/2}} dt$ i) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt{t}}{t(1+t^2)} dt$
- j) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx$ k) $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ l) $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

****15)** Montrez les comparaisons suivantes en justifiant l'existence des intégrales :

- a) $\int_0^X \frac{\ln x}{x + e^{-x}} dx \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}(\ln X)^2$ b) $\int_x^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt{t}}{t(1+t^2)} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4x^2}$
- c) $\int_x^1 \frac{e^t}{\sin t} dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$ d) $\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2\sqrt{x}$
- e) $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = o(e^{-x})$ quand $x \rightarrow +\infty$ f) $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln x$
- g) $e^{x/2} = o\left(\int_1^x \frac{e^t}{t} dt\right)$ quand $x \rightarrow +\infty$ h) $\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{1+\sqrt{t}} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{x} \ln(x)$

****16)** Donnez des équivalents simples aux points indiqués des intégrales suivantes en justifiant leurs existences :

- a) $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ?$ b) $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t^{3/2}} dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} ?$
- c) $\int_x^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{t^2 + 1} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} ?$ d) $\int_0^x \ln(t^2 + \sin t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} ?$

****17)** Discutez, selon α et β réels, de la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$.

****18)** Soit a, α deux réels strictement positifs.

- a) En effectuant le changement de variable $t = \tan x$, montrez que $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + a \sin^2 x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (1+a)t^2} dt$, puis calculez ces intégrales et donnez la valeur de $\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + a \sin^2 x} dx$.
- b) Donnez la nature de la série de terme général $\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + (t + n\pi)^\alpha \sin^2 t} dt$ selon la valeur de α .
- c) Étudiez la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^\alpha \sin^2 x} dx$.

****19)** Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, telles que les fonctions $t \mapsto t^2 f(t)^2$ et $t \mapsto f'(t)^2$ soient intégrables sur $[0, +\infty[$.

- a) Montrez que les fonctions $t \mapsto f(t)^2$ et $t \mapsto t f(t)^2$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.
- b) Montrez que la fonction $t \mapsto t f(t) f'(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- c) Montrez que, pour tout $x > 0$: $x f(x)^2 = \int_0^x f(t)^2 dt + 2 \int_0^x t f(t) f'(t) dt$. Déduisez-en que $x f(x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- d) Démontrez que :

$$\left(\int_0^{+\infty} f^2(t) dt \right)^2 \leq 4 \left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt \right)$$

Oraux de concours

- 1) **IMT** Justifiez l'existence de $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$.
- 2) **IMT** Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^a \ln(1 + e^{ax}) dx$ est-elle convergente ?
- 3) **IMT** Justifiez l'existence de $\int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$ et donnez sa valeur.
- 4) **CCINP** Justifiez l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$.
- 5) **CCINP** Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n} dx$ converge-t-elle ? Donnez alors sa valeur.
- 6) **IMT** Soit $a > 0$. Donnez la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^a} dx$
- 7) **CCINP** Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k = \int_k^{k+1} \frac{x - \frac{1}{2} - [x]}{x} dx$.
 - a) Calculez I_k .
 - b) On pose $J_n = \int_1^n \frac{x - \frac{1}{2} - [x]}{x} dx$. Montrez que $J_n = n + (n + \frac{1}{2}) \ln(n+1) - \ln n!$.
 - c) Montrez que $\ln n! = n \ln n - n + \ln n + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + o(1)$.
 - d) Montrez que la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ converge et donnez sa valeur.
 - e) Montrez que $\int_1^{+\infty} \frac{x - \frac{1}{2} - [x]}{x} dx$ converge et donnez sa valeur.
- 8) **CCINP** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$, $v_n = e^{-\sqrt{n}}$ et $I_n = \int_n^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$.
 - a) Montrez que la série $\sum v_n$ converge.
 - b) Montrez que I_n existe et $I_n = 2(1 + \sqrt{n})v_n$.
 - c) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$. Montrez que $I_{n+1} \leq R_n \leq I_n$ et donner un équivalent de R_n .
 - d) On pose $T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrez que $T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{R_n}{\sqrt{e}}$.
- 9) **CEN** Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$ pour $n \geq 1$.
 - a) On définit les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Montrez qu'elles convergent vers la même limite.
 - b) Montrez que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n$.
 - c) Montrez qu'il existe des réels a et b tels que $\ln I_n = a \ln n + b + o(1)$.
 - d) Montrez que la série de terme général I_n converge.
- 10) **CCMP** Soit $y \in \mathbb{R}$. Calculez $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2 y^2)} dx$.
- 11) **CCMP** Soit $y \in \mathbb{R}$. Justifiez l'existence et calculez $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)} dx$.
- 12) **CCMP** Soit $\alpha > 0$. Étudiez la convergence de $\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\right) - 1\right) dt$.
- 13) **CCMP** Soit $a \in [0, 1[$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue par morceaux telle que $f(x+1)/f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a$. Montrez que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.