Valeurs intermédiaires

1 Théorèmes des valeurs intermédiaires

Dans ce chapitre, nous verrons 4 formes du théorème des valeurs intermédiaires (notez le pluriel) : ces 4 formes sont équivalentes.

1.1 Annulation d'une fonction

Théorème 1. *Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ ($a < b$).*
Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Remarque. L'hypothèse de continuité est essentielle !

On peut généraliser légèrement ce théorème avec des limites aux extrémités (mais attention à l'inégalité stricte !).

Corollaire 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = (a, b)$ ($a < b$, a et b réels ou non).*
Si f est continue sur I, admet des limites (réelles ou non) en a et b et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) . \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x > b}} f(x) < 0$, alors il existe $c \in I$ tel que $f(c) = 0$.

1.2 Valeurs intermédiaires

Théorème 2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
Si f est continue sur I et si y et z sont deux valeurs prises par f sur I, alors tout nombre compris entre y et z est aussi une valeur prise par f sur I.

$$\forall (y, z) \in f(I)^2 \quad \forall t \in [y, z] \quad \exists x \in I \quad t = f(x)$$

1.3 Signe sur un intervalle

Théorème 3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
Si f est continue sur I et f ne s'annule pas sur I, alors f est de signe constant sur I.

Remarque. L'hypothèse de continuité est essentielle, ainsi que celle d'être sur un intervalle !

1.4 Image continue d'un intervalle

Théorème 4. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
Si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

En une phrase : l'image continue d'un intervalle est un intervalle.

Remarque. Il n'y a *a priori* aucun rapport entre le type de l'intervalle I (intervalle ouvert, fermé, semi-ouvert, borné, non borné) et celui de $f(I)$.

2 Théorème de bijection

2.1 Théorème de la valeur intermédiaire

Théorème 5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

Si f est continue sur I, strictement monotone sur I et change de signe sur I, alors la fonction f s'annule exactement une fois sur I.

2.2 Théorème de bijection

Théorème 6. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

Si f est continue sur I et strictement monotone sur I, alors

- ▷ *$J = f(I)$ est un intervalle ;*
- ▷ *f réalise une bijection de I dans J ;*
- ▷ *la réciproque de cette bijection est continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f sur I.*

2.3 Injectivité et monotonie

On sait qu'une fonction strictement monotone est injective. Dans le cas des fonctions continues, on dispose d'une réciproque.

Proposition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

Si f est continue et injective sur I, alors f est strictement monotone sur I.

3 Théorème des bornes atteintes

Théorème 7. *Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ ($a < b$).*

Si f est continue sur $[a, b]$, alors

- ▷ *f est bornée sur $[a, b]$;*
- ▷ *f atteint ses bornes sur $[a, b]$.*

Autrement dit, si f est continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$ où m est le minimum de f sur $[a, b]$ et M le maximum de f sur $[a, b]$.

On dit rapidement que l'image continue d'un segment est un segment.