

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, p, q deux projecteurs de E différents, non triviaux (*i.e.* non nuls et différents de Id_E) et qui commutent.

On pose $u = p + q$.

Q 1. Montrez que si x est un vecteur non nul et λ est un scalaire tels que $p(x) = \lambda x$, alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Q 2. Montrez que $E = (\text{Ker } p \cap \text{Ker } q) \oplus (\text{Im } p \cap \text{Ker } q) \oplus (\text{Ker } p \cap \text{Im } q) \oplus (\text{Im } p \cap \text{Im } q)$.

Q 3. Montrez que

$$\begin{aligned}\text{Ker } u &= \text{Ker } p \cap \text{Ker } q \\ \text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E) &= \text{Im } p \cap \text{Im } q \\ \text{Ker}(u - \text{Id}_E) &= (\text{Im } p \cap \text{Ker } q) \oplus (\text{Ker } p \cap \text{Im } q)\end{aligned}$$

Q 4. Montrez que le polynôme minimal μ_u de u divise $X(X-1)(X-2)$ et que $\mu_u \neq X$ et $\mu_u \neq X-2$.

Dans toute la suite, on suppose de plus que p est un polynôme en u .

Q 5. Montrez que $\mu_u \neq X-1$.

Q 6. Montrez que μ_u ne peut pas être de degré 2. Concluez : que vaut μ_u ?

Exercice hebdomadaire 2 - Corrigé

Q 1. Par hypothèse, $p(x) = \lambda x$, alors $p^2(x) = \lambda p(x) = \lambda^2 x$, or p est un projecteur donc $p^2 = p$ donc il vient $p(x) = \lambda^2 x$, donc $\lambda x = \lambda^2 x$, donc $(\lambda - \lambda^2)x = 0$. Or $x \neq 0$, donc $\lambda - \lambda^2 = 0$, donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Q 2. Par analyse-synthèse, on montre que tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme $a + b + c + d$, où $a \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$, $b \in \text{Im } p \cap \text{Ker } q$, $c \in \text{Ker } p \cap \text{Im } q$, $d \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

Analyse : on suppose l'existence de a, b, c, d , alors en appliquant p et q , on obtient $p(x) = b + d$ et $q(x) = c + d$, puis $q \circ p(x) = p \circ q(x) = d$.

Donc

$$\begin{cases} d &= p \circ q(x) = q \circ p(x) \\ b &= p(x) - p \circ q(x) \\ c &= q(x) - p \circ q(x) \\ a &= x - p(x) - q(x) + p \circ q(x) \end{cases}$$

Ce qui prouve l'unicité du quadruplet (a, b, c, d) .

Synthèse : on vérifie que les quatre vecteurs a, b, c, d définis ci-dessus conviennent. Il est évident que $x = a + b + c + d$, que $d = p \circ q(x) = q \circ p(x) \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, que $p(b) = b$ et $q(b) = 0$ donc que $b \in \text{Im } p \cap \text{Ker } q$, que de même $c \in \text{Ker } p \cap \text{Im } q$ et enfin que $p(a) = q(a) = 0$.

Q 3. L'inclusion $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q \subset \text{Ker } u$ est évidente. Réciproquement, si $x \in \text{Ker } u$, alors $p(x) = -q(x)$, donc en appliquant p ou q on obtient $p(x) = -p \circ q(x) = -q \circ p(x) = q(x)$, donc au total, $p(x) = q(x) = 0$. Donc $\text{Ker } u \subset \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$. Finalement, $\text{Ker } u = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

L'inclusion $\text{Im } p \cap \text{Im } q \subset \text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E)$ est évidente, car si $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, alors $p(x) = q(x) = x$. Réciproquement, si $x \in \text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E)$, alors $2x = p(x) + q(x)$, donc en appliquant p ou q on obtient $2p(x) = p(x) + p \circ q(x)$, donc $p(x) = p \circ q(x) = q \circ p(x) = q(x)$, donc au total, $p(x) = q(x) = x$. Donc $\text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E) \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$. Finalement, $\text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

Si $x \in (\text{Im } p \cap \text{Ker } q) \oplus (\text{Ker } p \cap \text{Im } q)$, alors $x = b + c$ où $b \in \text{Im } p \cap \text{Ker } q$ et $c \in \text{Ker } p \cap \text{Im } q$, donc $p(x) = b$ et $q(x) = c$ donc $u(x) = p(x) + q(x) = b + c = x$ donc $x \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$. Réciproquement, si $x \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$, alors $x = p(x) + q(x)$, donc en appliquant p on obtient $p(x) = p(x) + p \circ q(x)$ donc $p \circ q(x) = q \circ p(x) = 0$, autrement dit $p(x) \in \text{Im } p \cap \text{Ker } q$ et $q(x) \in \text{Ker } p \cap \text{Im } q$, ce qui prouve que $u(x) = p(x) + q(x) \in (\text{Im } p \cap \text{Ker } q) \oplus (\text{Ker } p \cap \text{Im } q)$. Finalement, $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) = (\text{Im } p \cap \text{Ker } q) \oplus (\text{Ker } p \cap \text{Im } q)$.

Q 4. On a donc montré que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E)$, donc pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = a + b + c$ où $a \in \text{Ker } u$, $b \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $c \in \text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E)$.

Alors $u(x) = b + 2c$, $u^2(x) = b + 4c$, $u^3(x) = b + 8c$. Or $v = u \circ (u - \text{Id}_E) \circ (u - 2 \text{Id}_E) = u^3 - 3u^2 + 2u$, donc $v(x) = (b + 8c) - 3(b + 4c) + 2(b + 2c) = 0$.

Ceci prouve que le polynôme $X(X - 1)(X - 2)$ est annulateur de u , donc que μ_u divise $X(X - 1)(X - 2)$.

Si $\mu_u = X$, alors $u = 0$ donc $q = -p$, mais comme $p \neq 0$, il existe $x \neq 0$ tel que $p(x) = x$ donc $q(x) = -x$, ce qui est impossible d'après la question **Q 1**.

Si $\mu_u = X - 2$, alors $u = 2 \text{Id}_E$, donc $q = 2 \text{Id}_E - p$, mais comme p est un projecteur différent de Id_E , il existe $x \neq 0$ tel que $p(x) = x$, donc $q(x) = 2x$, ce qui est encore impossible d'après **Q 1**.

Q 5. Si $\mu_u = X - 1$, alors $u = p + q = \text{Id}_E$, or il existe un polynôme P tel que $p = P(u)$, donc $p = P(\text{Id}_E)$ est une homothétie vectorielle, ce qui pour un projecteur signifie que $p = 0$ ou $p = \text{Id}_E$, ce qui contredit l'hypothèse de l'exercice.

Q 6. Si μ_u est de degré 2, alors $\mathbb{K}[u] = \text{vect}(u, \text{Id}_E)$ donc il existe $(\alpha, \beta) \in K^2$ tel que $p = \alpha u + \beta \text{Id}_E$.

Si $\mu_u = X(X - 2)$, alors en choisissant un vecteur $x \neq 0$ dans $\text{Ker } u \subset \text{Ker } p$, on a alors $u(x) = p(x) = 0$, donc $\beta x = 0$ donc $\beta = 0$. Puis en choisissant $x \neq 0$ dans $\text{Ker}(u - 2 \text{Id}_E) \subset \text{Im } p$, on a $u(x) = 2x = \alpha x$ donc $\alpha = \frac{1}{2}$. Donc finalement, $p = \frac{1}{2}u = q$, ce qui contredit l'hypothèse.

Si $\mu_u = X(X - 1)$, alors de même on montre que $\beta = 0$ et $\alpha = 0$ ou 1 , ce qui implique $p = 0$ ou $p = \text{Id}_E$, encore contradictoire avec l'hypothèse.

Et de même si $\mu_u = (X - 1)(X - 2)$.

Il ne reste donc qu'un seul cas : $\mu_u = X(X - 1)(X - 2)$.