

## Problème 1 - Endomorphismes échangeurs

Etant donnés deux entiers naturels  $n$  et  $p$  non nuls, on note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbb{C}$  (et  $0_{n,p}$  sa matrice nulle) et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  celui des matrices carrées à  $n$  lignes et à coefficients dans  $\mathbb{C}$  (et  $0_n$  sa matrice nulle).

Dans ce problème,  $E$  désigne un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $s \geq 2$ . On dit qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$  est un endomorphisme échangeur quand il existe deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  tels que

$$\begin{cases} E = F \oplus G \\ u(F) \subset G \\ u(G) \subset F \end{cases}$$

On dit alors que  $u$  échange les sous-espaces  $F$  et  $G$ .

Après une première partie consacrée à une étude d'exemples, le problème consiste à montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

(P1)  $u$  est un endomorphisme échangeur

(P2) il existe deux endomorphismes  $a$  et  $b$  tels que  $a^2 = b^2 = 0$  et  $u = a + b$

La partie 2 montre une implication, la partie 3 sa réciproque dans un cas particulier. La partie 4 énonce et démontre un résultat général qui est utilisé dans la partie 5 pour montrer la réciproque dans les autres cas que le cas particulier.

Les parties 1 à 4 sont indépendantes les unes des autres, mais la partie 5 dépend des parties 3 et 4.

### I. Des exemples

**Q 1.** Justifiez que l'endomorphisme nul est un endomorphisme échangeur.

**Q 2.** Dans cette question,  $E$  est de dimension 2,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  est une base de  $E$  et  $u$  est l'endomorphisme de  $E$  tel que  $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $u^2 = \text{Id}_E$ . Déterminer deux vecteurs non colinéaires  $e'_1$  et  $e'_2$  tels que  $u(e'_1) = e'_2$ .
- Donnez alors deux droites vectorielles  $D_1$  et  $D_2$ , supplémentaires dans  $E$ , telles que  $u(D_1) = D_2$ .
- Concluez : justifiez que  $u$  est un exemple d'endomorphisme échangeur.

**Q 3.** Dans cette question,  $E$  est de dimension 3,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $E$  et  $u$  est l'endomorphisme de  $E$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ 20 & -5 & 5 \\ -12 & 3 & -3 \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

- Calculez  $A^2$ . Montrez que  $\text{Im } u$  est une droite,  $\text{Ker } u$  est un plan et  $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ .
- Déterminez une base de  $\text{Im } u$ , notée  $(e'_1)$ . Puis complétez-la en une base de  $\text{Ker } u$ , notée  $(e'_1, e'_2)$ . Puis complétez cette base en une base de  $E$ , notée  $(e'_1, e'_2, e'_3)$ .
- Concluez : justifiez que  $u$  est un endomorphisme échangeur de  $\text{Ker } u$  et  $\text{vect}(e'_3)$ .

**Q 4.** Dans cette question,  $E$  est de dimension quelconque et  $u$  est un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^2 = 0$ . En vous inspirant de ce qui précède, montrez que  $u$  est un endomorphisme échangeur.

**Q 5.** Dans cette question,  $E$  est de nouveau de dimension 3,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $E$  et  $u$  est l'endomorphisme de  $E$  tel que  $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -3 & -4 & -8 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

- Quel est le rang de  $u$ ? Donnez un vecteur non nul appartenant à  $\text{Ker } u$ , qu'on note  $b$ .
- On pose  $e'_1 = e_3 - e_2$ . Calculez  $u(e'_1)$ . Puis on pose  $e'_2 = \frac{1}{2}(u(e'_1) + b)$ ,  $e'_3 = \frac{1}{2}(u(e'_1) - b)$ . Montrez que  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $E$ .
- Donnez la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , puis montrez que  $u$  est un endomorphisme échangeur.

### II. (P1) implique (P2)

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. Soient  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ . On considère dans  $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$  la matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$$

**Q 6.** Calculez le carré de la matrice  $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ . Montrez ensuite que  $M$  est la somme de deux matrices de carré nul.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme  $u$  échangeur et on se donne donc une décomposition  $E = F \oplus G$  dans laquelle  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels échangés par  $u$ .

**Q 7.** Étudiez le cas particulier où  $F$  ou  $G$  est nul.

**Q 8.** On suppose ici  $F$  et  $G$  tous deux non nuls.

On choisit une base  $(f_1, \dots, f_n)$  de  $F$  et une base  $(g_1, \dots, g_p)$  de  $G$ . La famille  $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$  est donc une base de  $E$ .

Compte-tenu des hypothèses, décrivez la forme de la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Q 9.** Déduisez des questions précédentes que  $u$  vérifie **(P2)**.

### III. (P2) implique (P1) dans le cas particulier bijectif

Dans cette partie,  $u$  désigne un **automorphisme** de  $E$  qui vérifie **(P2)**. On suppose donc qu'il existe deux endomorphismes  $a$  et  $b$  de  $E$  tels que

$$u = a + b \text{ et } a^2 = b^2 = 0$$

On rappelle que la dimension de  $E$  est notée  $s$ .

**Q 10.** Comparez  $\text{Ker}(a)$  et  $\text{Im}(a)$  et déduisez-en

$$\dim \text{Ker}(a) \geq \frac{s}{2}$$

**Q 11.** Démontrez que  $E = \text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)$  et que  $\text{Ker}(a) = \text{Im}(a)$  et  $\text{Ker}(b) = \text{Im}(b)$ .

**Q 12.** Montrez que  $u$  est échangeur.

### IV. Un résultat général

On veut montrer que pour tout  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,

$$\text{il existe un entier pair } p \geq 2 \text{ tel que } E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im } f^p$$

où  $f^p$  désigne l'application  $f \circ f \circ \dots \circ f$ , composée de  $f$  avec elle-même  $p$  fois.

**Q 13.** Montrez que si  $f$  est un automorphisme de  $E$ , alors l'énoncé proposé est vraie.

On suppose dans toute la suite de cette partie que  $f$  n'est pas un automorphisme.

**Q 14.**

a) Montrez que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1}$ .

b) Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $n_k = \dim \text{Ker } f^k$ . Montrez que la suite  $(n_k)$  est croissante, puis qu'elle est stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang).

**Q 15.** Soit  $\mathcal{A} = \{k \in \mathbb{N}^* / n_k = n_{k+1}\}$ .

a) Justifiez l'existence de  $q = \min \mathcal{A}$ .

b) Montrez que  $\text{Ker } f^q = \text{Ker } f^{q+1}$ .

c) Montrez par récurrence que pour tout  $k \geq q$ ,  $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^q$ .

**Q 16.** Montrez enfin que  $E = \text{Ker } f^q \oplus \text{Im } f^q = \text{Ker } f^{2q} \oplus \text{Im } f^{2q}$ .

### V. (P2) implique (P1) dans le cas non bijectif

Dans cette partie, on admet la validité du théorème suivant, dont la démonstration est trop longue et subtile pour tenir dans ce sujet.

**Théorème :** si un endomorphisme  $v$  d'un espace vectoriel de dimension finie a une puissance nulle (i.e. il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $v^k = 0$ ), alors  $v$  est échangeur.

On se donne ici un endomorphisme non bijectif  $u$  de  $E$ . On suppose qu'il existe deux endomorphismes  $a$  et  $b$  de  $E$  tels que

$$u = a + b \text{ et } a^2 = b^2 = 0$$

**Q 17.** Montrez que  $a$  et  $b$  commutent avec  $u^2$ .

On fixe maintenant un entier pair  $p \geq 2$  tel que  $E = \text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p$  grâce à la partie précédente.

**Q 18.** Montrez que le sous-espace vectoriel  $G = \text{Im } u^p$  est stable par  $a$ ,  $b$  et  $u$  et que les endomorphismes induits  $a_G$ ,  $b_G$  et  $u_G$  vérifient :  $a_G$  et  $b_G$  sont de carré nul, alors que  $u_G$  est un automorphisme de  $G$ .

**Q 19.** Déduisez-en que  $u$  est échangeur. *On pourra utiliser, entre autres, le résultat final de la question Q 12.*

## Problème 1

### I.

**Q 1.** Il suffit de prendre  $F = E$  et  $G = \{0\}$  : en notant  $o$  l'endomorphisme nul, on a bien  $o(F) = \{0\} \subset G$  et  $o(G) = \{0\} \subset F$ .

**Q 2.**

a) Un simple calcul matriciel permet de vérifier que  $u^2 = \text{Id}_E$ . L'endomorphisme  $u$  est donc une symétrie telle que  $u(e_1) = e_1$  et  $u(e_2) = -e_2$ .

En posant  $e'_1 = e_1 + e_2$  et  $e'_2 = e_1 - e_2$ , on a alors  $u(e'_1) = u(e_1) + u(e_2) = e_1 - e_2 = e'_2$ . On note que  $u(e'_2) = e'_1$ .

b) Les deux vecteurs  $e'_1$  et  $e'_2$  sont non colinéaires et  $\dim E = 2$ , donc la famille  $(e'_1, e'_2)$  est une base de  $E$ , donc les droites vectorielles  $D_1 = \text{vect}(e'_1)$  et  $D_2 = \text{vect}(e'_2)$  sont supplémentaires.

Comme  $u(e'_1) = e'_2$  et  $u(e'_2) = e'_1$ , on a donc  $u(D_1) = D_2$  et  $u(D_2) = D_1$ .

c) Ce qui précède justifie que  $u$  échange  $D_1$  et  $D_2$ .

**Q 3.**

a) On vérifie que  $A^2 = 0$ , puis que  $\text{rg}(A) = 1$  (les colonnes sont colinéaires entre elles) donc  $\text{Im } u$  est une droite vectorielle. Puis grâce au th. du rang, on en déduit que  $\dim \text{Ker } u = \dim E - \text{rg } u = 3 - 1 = 2$  donc  $\text{Ker } u$  est un plan.

De plus, comme  $u^2 = 0$ , on a directement  $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ .

b) Le vecteur  $e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  dirige  $\text{Im } u$ , puisque  $e'_1 = f(e_3)$ .

Le noyau de  $u$  a pour équation  $4x - y + z = 0$  dans la base  $\mathcal{B}$ , donc le vecteur  $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  appartient à  $\text{Ker } u$ . Comme

il n'est pas colinéaire à  $e'_1$ ,  $(e'_1, e'_2)$  est une famille libre de 2 vecteurs dans  $\text{Ker } u$ , espace de dimension 2, donc il s'agit d'une base de  $\text{Ker } u$ .

En posant par exemple  $e'_3 = e_3$ , la matrice  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, e'_2, e'_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est clairement de rang 3 donc la famille

$(e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $E$ .

c)  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $E$  donc  $E = \text{vect}(e'_1, e'_2) \oplus \text{vect}(e'_3) = \text{Ker } u \oplus \text{vect}(e'_3)$ .

$u(\text{Ker } u) = \{0\} \subset \text{vect}(e'_3)$  et  $u(\text{vect}(e'_3)) = \text{vect}(u(e'_3)) \subset \text{Im } u \subset \text{Ker } u$ .

Donc  $u$  est un endomorphisme échangeur de  $\text{Ker } u$  et  $\text{vect}(e'_3)$ .

**Q 4.** Comme  $u^2 = 0$ , on encore  $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ .

On pose  $H$  un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  :  $E = H \oplus \text{Ker } u$ . De plus,  $u(H) \subset \text{Im } u \subset \text{Ker } u$  et  $u(\text{Ker } u) = \{0\} \subset H$ .

Donc  $u$  est un endomorphisme échangeur de  $H$  et  $\text{Ker } u$ .

**Q 5.**

a)  $\text{rg } u = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$  (méthode du pivot de Gauss). Le vecteur  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  est dans  $\text{Ker } u$ .

b)  $u(e'_1) = u(e_3) - u(e_2) = (-4e_1 - 8e_2 + 6e_3) - (-2e_1 - 4e_2 + 3e_3) = -2e_1 - 4e_2 + 3e_3$ .

$e'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  et  $e'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ . Donc  $\det_{\mathcal{B}'} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$  donc  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$ .

c) Pour trouver la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , il faut calculer les coordonnées de  $u(e'_1)$ ,  $u(e'_2)$  et  $u(e'_3)$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

Un rapide coup d'œil permet de remarquer que  $u(e'_1) = e'_2 + e'_3$ , puis un simple calcul permet d'obtenir  $u(e'_2) = -e_2 + e_3 = e'_1$  et  $u(e'_3) = e'_1$ .

Donc  $\text{mat}_{\mathcal{B}'} u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On pose  $F = \text{vect}(e'_1)$  et  $G = \text{vect}(e'_2, e'_3)$ , sous-espaces supplémentaires dans  $E$ . On a alors  $u(F) = G$  et  $u(G) = F$ , donc  $u$  est un endomorphisme échangeur.

## II.

- Q 6.** En notant  $N = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ , on a  $N^2 = 0$ . De même, en notant  $P = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{p,n} \\ A & 0_p \end{pmatrix}$ , on a de même  $P^2 = 0$ . Et  $M = N + P$  donc  $M$  est la somme de deux matrices de carré nul.
- Q 7.** Si  $F = \{0\}$ , alors  $u(E) = u(G) \subset F = \{0\}$  donc  $u = 0$ . Donc en écrivant  $u = 0 + 0$ ,  $u$  est la somme de deux endomorphismes de carré nul. Et de même si  $G = \{0\}$ .
- Q 8.**  $u(F) \subset G$  donc pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $u(f_i) \in G$  donc  $u(f_i)$  est combinaison linéaire de  $(g_1, \dots, g_n)$ , autrement dit les  $p$  premières coordonnées de  $u(f_i)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont nulles. De même, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $u(g_i) \in F$  donc les  $n$  dernières coordonnées de  $u(g_i)$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont nulles.
- La matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est donc de la forme de  $M$ .
- Q 9.** D'après une question précédente,  $M = N + P$  où  $N^2 = P^2 = 0$ , donc en posant  $a$  et  $b$  les endomorphismes de matrices  $N$  et  $P$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on obtient  $u = a + b$  où  $a^2 = b^2 = 0$ .

## III.

- Q 10.**  $a^2 = 0$  donc  $\text{Im } a \subset \text{Ker } a$  donc  $\dim(\text{Im } a) \leq \dim(\text{Ker } a)$ . D'après le th. du rang,  $s = \dim(\text{Im } a) + \dim(\text{Ker } a)$  donc  $s \leq 2 \dim(\text{Ker } a)$ , i.e.  $\dim \text{Ker}(a) \geq \frac{s}{2}$ .
- Q 11.** Soit  $x \in \text{Ker}(a) \cap \text{Ker}(b)$ , alors  $a(x) = b(x) = 0$  donc  $u(x) = 0$ . Or  $u$  est un automorphisme de  $E$  donc  $x = 0$ . Ceci prouve que  $\text{Ker}(a) \cap \text{Ker}(b) = \{0\}$ .
- Donc  $\dim(\text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)) = \dim \text{Ker}(a) + \dim \text{Ker}(b) \geq s$  d'après la question précédente. Mais comme  $\text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on a aussi  $\dim(\text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)) \leq s$ .
- Finalement,  $\dim(\text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)) = s = \dim(E)$ , donc  $E = \text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)$  et en plus, on a aussi  $\dim \text{Ker}(a) = \dim \text{Ker}(b) = \frac{s}{2}$  (ce qui implique que  $s$  est pair).
- Le théorème du rang redonne alors  $\dim \text{Im}(a) = \frac{s}{2}$ , puis avec l'inclusion  $\text{Im}(a) \subset \text{Ker}(a)$ , on en conclut que  $\text{Im}(a) = \text{Ker}(a)$ , et de même pour  $b$  ( $a$  et  $b$  jouent le même rôle).
- Q 12.**  $u(\text{Ker } a) = a(\text{Ker } a) + b(\text{Ker } a) = \{0\} + b(\text{Ker } a) \subset \text{Im}(b) = \text{Ker}(b)$  et de même  $u(\text{Ker } b) \subset \text{Ker}(a)$ , donc  $u$  échange  $\text{Ker } a$  et  $\text{Ker } b$ .

## IV.

- Q 13.** Si  $f$  est un automorphisme de  $E$ , alors  $\text{Ker } f^2 = \{0\}$  et  $\text{Im } f^2 = E$  donc  $\text{Ker } f^2$  et  $\text{Im } f^2$  sont supplémentaires.
- Q 14.**
- a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in \text{Ker } f^k$ ,  $f^k(x) = 0$  donc  $f(f^k(x)) = f(0) = 0$  donc  $f^{k+1}(x) = 0$  donc  $x \in \text{Ker } f^{k+1}$ .
- b) D'après la question précédente, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1}$  donc
- $$n_k = \dim \text{Ker } f^k \leq \dim \text{Ker } f^{k+1} = n_{k+1}. \text{ La suite } (n_k) \text{ est donc croissante.}$$
- On sait donc que la suite  $(n_k)$  est une suite croissante d'entiers naturels, mais elle est aussi majorée par la dimension de  $E$ , donc elle est stationnaire, sinon on pourrait créer une suite infinie d'entiers naturels dans l'ensemble fini  $\llbracket 0, s \rrbracket$ .
- Q 15.**
- a) L'ensemble  $\mathcal{A}$  est une partie de  $\mathbb{N}$ . Pour montrer qu'il a un minimum, il suffit de montrer qu'il n'est pas vide (propriété fondamentale de  $\mathbb{N}$ ).
- On sait que la suite  $(n_k)$  est stationnaire : il existe un rang  $k_0$  tel que  $r_{k_0+1} = r_{k_0}$ , ce qui prouve que  $k_0 \in \mathcal{A}$ , donc que  $\mathcal{A}$  n'est pas vide.
- b) Par définition,  $q \in \mathcal{A}$  donc  $n_q = n_{q+1}$ . Or on a montré que  $\text{Ker } f^q \subset \text{Ker } f^{q+1}$ . Donc ces deux s.e.v., qui ont même dimension, sont donc égaux.
- c) Soit  $\mathcal{P}(k)$  la proposition «  $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^q$  ».
- $\mathcal{P}(p)$  et  $\mathcal{P}(p+1)$  sont vraies.
- Si  $\mathcal{P}(k)$  est vraie, alors
- on sait déjà que  $\text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1}$ , donc  $\text{Ker } f^p \subset \text{Ker } f^{k+1}$ ;
  - soit  $x \in \text{Ker } f^{k+1}$ , donc  $f^{k+1}(x) = 0$  donc  $f^k(f(x)) = 0$  donc  $f(x) \in \text{Ker } f^k$ ,
- par hypothèse de récurrence,  $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^q$  donc  $f(x) \in \text{Ker } f^q$  donc  $f^q(f(x)) = 0$  donc  $f^{q+1}(x) = 0$  donc  $x \in \text{Ker } f^{q+1}$ ,
- or on a montré que  $\text{Ker } f^{q+1} = \text{Ker } f^q$  donc  $x \in \text{Ker } f^q$ ;
- ceci prouve que  $\text{Ker } f^{k+1} \subset \text{Ker } f^q$ ;

On a la double inclusion, donc  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout  $k \geq q$ ,  $\text{Ker } f^k = \text{Ker } f^q$ .

**Q 16.** Soit  $x \in \text{Ker } f^q \cap \text{Im } f^q$ ,  $f^q(x) = 0$  et il existe  $t \in E$  tel que  $x = f^q(t)$ , donc  $f^q(f^q(t)) = f^q(x) = 0$  donc  $f^{2q}(t) = 0$ ; on a donc  $t \in \text{Ker } f^{2q}$ , or d'après le résultat précédent, on a  $\text{Ker } f^{2q} = \text{Ker } f^q$ , donc  $t \in \text{Ker } f^q$  donc  $x = f^q(t) = 0$ .

Ceci montre que  $\text{Ker } f^q \cap \text{Im } f^q = \{0\}$ .

Comme on a  $n = \dim \text{Ker } f^p + \dim \text{Im } f^q$  d'après le th. du rang, on en déduit que  $E = \text{Ker } f^q \oplus \text{Im } f^q$ .

Comme à partir du rang  $q$ , les noyaux ne changent plus, leurs dimensions ne changent plus non plus donc d'après le th. du rang, les dimensions des images  $\text{Im } f^k$  ne changent plus et comme il y a une inclusion évidente entre ces images, elles forment une suite constante à partir du rang  $q$ .

On a donc montré : pour tout  $k \geq q$ ,  $E = \text{Ker } f^k \oplus \text{Im } f^k$ . En particulier  $p = 2q$  convient.

## V.

**Q 17.**  $u^2 = a^2 + a \circ b + b \circ a + b^2 = a \circ b + b \circ a$  donc  $a \circ u^2 = a^2 \circ b + a \circ b \circ a = a \circ b \circ a$  et  $u^2 \circ a = a \circ b \circ a + b \circ a^2 = a \circ b \circ a$ , donc on a bien  $a \circ u^2 = u^2 \circ a$ .

**Q 18.**  $a$  et  $u^2$  commutent donc comme  $p$  est pair,  $a$  et  $u^p = (u^2)^{p/2}$  commutent donc  $\text{Im } u^p$  est stable par  $a$  :

soit  $x \in \text{Im } u^p$ , il existe  $t \in E$  tel que  $x = u^p(t)$  donc  $a(x) = a \circ u^p(t) = u^p \circ a(t) \in \text{Im } u^p$ .

De même,  $\text{Im } u^p$  est stable par  $b$  et bien sûr stable par  $u$ .

Comme  $a^2 = 0$ , on a immédiatement  $a_G^2 = 0$  et pareil pour  $b_G^2 = 0$ . Enfin,  $\text{Ker}(u_G) = \text{Ker}(u) \cap G \subset \text{Ker}(u^p) \cap G = \{0\}$  par choix de  $p$ , donc  $u_G$  est un automorphisme de  $G$  ( $G$  est de dimension finie).

**Q 19.** D'une part, on a donc  $u_G = a_G + b_G$  et  $a_G^2 = b_G^2 = 0$  et  $u_G$  automorphisme de  $G$ .

D'après la partie III, il existe  $A, B$  deux sous-espaces vectoriels de  $G$  tels que  $G = A \oplus B$ ,  $u_G(A) = u(A) \subset B$  et  $u_G(B) = u(B) \subset A$ .

D'autre part,  $F = \text{Ker } u^p$  est aussi stable par  $u$  et par définition de  $F$ ,  $u_F^p = 0$ , donc d'après le th. admis dans l'énoncé,  $u_F$  est échangeur : il existe  $C$  et  $D$  deux sous-espaces vectoriels de  $F$  tels que  $F = C \oplus D$ ,  $u_F(C) = u(C) \subset D$  et  $u_F(D) = u(D) \subset C$ .

On a alors  $E = F \oplus G = (A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = (A \oplus C) \oplus (B \oplus D)$  et  $u(A + C) = u(A) + u(C) \subset B + D$  et de même  $u(B + D) \subset A + C$ .

Donc  $u$  est échangeur.