

Problème 1 - Matrices magiques

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel non nul. On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ est magique quand les $2n$ sommes des éléments de chaque ligne ou de chaque colonne sont égales : on note alors $s(A)$ la valeur commune de ces sommes. On note $\mathcal{G}_n$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(K)$.

On appelle J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent 1.

Q 1. Montrez que A est une matrice magique si et seulement si elle commute avec J . Dans ce cas, que vaut le produit AJ ?

Q 2.

- a) Montrez que $\mathcal{G}_n$ est un K -espace vectoriel.
- b) Montrez que $\mathcal{G}_n$ est stable par multiplication : pour tout $(A, B) \in \mathcal{G}_n^2$, $AB \in \mathcal{G}_n$.

Q 3.

- a) Que peut-on dire de l'application s définie sur $\mathcal{G}_n$?
- b) On note $\mathcal{G}_n^0$ l'ensemble des matrices A telles que $AJ = JA = 0$. Montrez que $\mathcal{G}_n^0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}_n$ et montrez que $\text{vect}(J)$ est un supplémentaire de $\mathcal{G}_n^0$.

Q 4. Soit E un K -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}$ une base de E . On note j l'endomorphisme de E de matrice J dans la base $\mathcal{B}$.

- a) Justifiez que le noyau de j est de dimension $n - 1$.
- b) Déterminez un vecteur non nul u de E tel que $j(u) = nu$, puis montrez que $E = \text{Ker } j \oplus \text{vect}(u)$.

- c) Montrez qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. On note D cette matrice diagonale.

Q 5. On reprend les mêmes notations que dans la question précédente.

Soit A une matrice magique, f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

- a) Montrez que les endomorphismes f et j commutent. Déduisez-en que $f(u)$ et u sont colinéaires.
- b) Montrez que $\text{Ker } j$ est stable par f (i.e. $f(\text{Ker } j) \subset \text{Ker } j$).

- c) Déduisez-en que la matrice $P^{-1}AP$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ où $\lambda \in K$ et $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$

Q 6. Déduisez des questions précédentes les dimensions de $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{G}_n^0$ en faisant apparaître les matrices traditionnellement notées $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$