

ALGÈBRE LINÉAIRE : RÉVISIONS ET COMPLÉMENTS

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

- +**1) Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v., n un entier au moins égal à 2 et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille libre de E .
- a) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $c_i = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} u_k$. Montrez que la famille $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.
- b) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$: on pose $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v_i = s + u_i$. Montrez que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si et seulement si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = -1$.
- c) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$: on pose $s = \sum_{i=1}^n u_i$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v_i = s + \lambda u_i$. Montrez qu'il existe exactement deux valeurs de λ pour lesquelles la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée.
- +**2) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$. Montrez que la famille $\mathcal{F}_n = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
- +**3) Soit f une application d'un ensemble Ω dans $\mathbb{C}$ qui prend une infinité de valeurs.
- Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, f, f^2, \dots, f^n)$ est libre dans l'espace $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{C})$.
- +**4) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_k = (X + k)^n$. Montrez que la famille $\mathcal{F}_n = (P_0, \dots, P_n)$ est libre.
- *5) Soit $a \in \mathbb{C}^*$. $\mathbb{C}$ est vu comme $\mathbb{R}$ -e.v. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $z + a\bar{z}$.
- a) Montrez que f est linéaire.
- b) Montrez que si $|a| \neq 1$, alors f est un automorphisme de $\mathbb{C}$.
- c) Déterminez le noyau et l'image de f dans le cas où $a = e^{i\alpha}$ (on pourra utiliser l'écriture trigonométrique des complexes).
- +*6) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui conserve le degré : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg f(P) = \deg P$.
- Montrez que f est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (on pourra étudier les restrictions de f à $\mathbb{K}_n[X]$).
- +**7) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on pose $f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP$.
- a) Montrez que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
- b) Montrez que si $P \in \text{Ker } f - \{0\}$, alors $X^2 - 1$ divise P , puis justifiez qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P = (X^2 - 1)^\alpha Q$ et $(Q(1) \neq 0 \text{ ou } Q(-1) \neq 0)$.
- c) Montrez que si n est impair, alors f est un automorphisme.
- d) Montrez que si n est pair, alors $\text{Ker } f$ est une droite vectorielle. Déduisez-en la dimension de $\text{Im } f$.
- **8) On pose $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$, on pose $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP(X)$.
- a) Montrez que $f \in \mathcal{L}(E)$.
- b) Déterminez $\text{Ker } f$.
- c) Montrez que $\text{Im } f = \{Q \in \mathbb{C}[X] \mid Q'(1) = Q(1) \text{ et } Q'(-1) = -Q(-1)\}$. Indication : restreindre à $\mathbb{C}_n[X]$.
- *9) Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
- Montrez que $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$
- +**10) Soit E, F, G 3 $\mathbb{K}$ -e.v, $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$.
- a) Montrez que $\text{Ker } g \circ f = \text{Ker } f \iff \text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0\}$.
- b) Montrez que $\text{Im } g \circ f = \text{Im } g \iff \text{Ker } g + \text{Im } f = F$.
- ***11) Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -e.v., $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que $g \in \mathcal{L}(F, E)$ est un inverse à droite de f quand $f \circ g = \text{Id}_F$.
- a) Montrez que si f possède deux inverses à droite différents, alors f en possède une infinité.
- b) Montrez que si f possède un unique inverse à droite, alors f est un isomorphisme (vous admettrez l'existence d'un supplémentaire de tout s.e.v.)

+**12) Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f^2 \circ g = f$ et $\text{rg } f = \text{rg } g$.

- Montrez que $\text{Ker } f = \text{Ker } g$.
- Montrez que $E = \text{Ker } g \oplus \text{Im } g$.
- Montrez que $g^2 \circ f = g$.

+**13) Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v., p et q deux projecteurs de E .

- Montrez que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
- Dans ce cas, montrez alors que : $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

**14) Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v., p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = 0$. Soit $r = p + q - q \circ p$.

Montrez que r est un projecteur et précisez ses éléments caractéristiques.

**15) Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. On suppose qu'il existe $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f \circ g - g \circ f = \text{Id}_E$.

- Démontrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.
- Déduisez-en que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(g^k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $L(E)$.
- Si E est de dimension finie $p \geq 1$, que pouvez-vous conclure ?

**16) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \text{Id}_E$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $u \in E$, on veut résoudre l'équation $x + af(x) = u$ d'inconnue $x \in E$.

- Montrez que pour toutes les valeurs de a , sauf une seule a_0 , l'équation a une unique solution que vous calculerez.
- Dans le cas où $a = a_0$, donnez une condition nécessaire sur u pour qu'il existe une solution, puis si cette condition est satisfaite, déterminez une solution particulière de l'équation qui soit combinaison linéaire de u et $f(u)$. Concluez.

+**17) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrez que $\text{Im } f = \text{Ker } f$ si et s. si n est pair, $\text{rg } f = \frac{n}{2}$ et $f^2 = 0$.
- Donnez un exemple d'une telle application linéaire f .
- Si les conditions de la question a sont satisfaites, alors on pose $r = n/2$: montrez qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$ (matrice par blocs).

+**18) Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et $f \in L(E)$, montrez l'équivalence

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f \iff \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f \iff \text{Im } f = \text{Im } f^2$$

*19) Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions finies et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. Montrez que $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.

**20) Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. On suppose que $u \circ v = 0$ et $u + v \in GL(E)$. Démontrez que $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = \dim(E)$.

**21) Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

- Montrez que s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = g \circ \varphi$, alors $\text{Im } f \subset \text{Im } g$.
- Montrez que la réciproque est vraie.

**22) Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.

- Montrez que s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = \varphi \circ g$, alors $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$.
- Montrez que la réciproque est vraie.

+*23) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrez que A peut s'écrire comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne. Déduisez-en que $A^2 = \text{tr}(A).A$.

+**24) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrez que f est proportionnelle à la trace (indication : faire intervenir la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

***25) Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et G un sous-groupe de cardinal n de $GL(E)$.

On pose $F = \{x \in E \mid \forall g \in G, g(x) = x\}$. Montrez que $\dim F = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$. Indication : on pourra utiliser $p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$.

*26) Montrez qu'il n'existe pas de couples de matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que $AB - BA = I_n$.

+*27) Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n . On suppose que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$. Montrez que $A = B$.

*28) Soit u, v les deux suites réelles telles que $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 10v_n$ et $v_{n+1} = -3u_n + 8v_n$.

Donnez des expressions de u_n et v_n en fonction de n .

**29) Soit u, v, w les trois suites réelles telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}w_n \\ v_{n+1} &= 5u_n - \frac{5}{2}v_n + 2w_n \\ w_{n+1} &= 4u_n - \frac{5}{2}v_n + 2w_n \end{cases}$$

Donnez des expressions de u_n , v_n et w_n en fonction de n et leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

+**30) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On suppose connaître P un polynôme annulateur de A , Q un polynôme annulateur de B .

On pose $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

a) Montrez que PQ est un polynôme annulateur de M dans le cas où $C = 0$.

b) Montrez que ce résultat reste vrai même si C n'est pas nulle. Indication : penser à un produit par blocs.

+**31) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, P un polynôme annulateur de A . On définit $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculez pour $k \in \mathbb{N}$ la matrice B^k en distinguant les cas k pair et k impair.

b) On pose $Q(X) = P(X^2)$. Montrez que Q est un polynôme annulateur de B .

+**32) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, P un polynôme annulateur de A . On définit $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

a) Calculez pour $k \in \mathbb{N}$ la matrice B^k .

b) Déterminez un polynôme annulateur de B .

+**33) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{K}_n[X]$. On pose $d : P \mapsto P'$, endomorphisme de E , puis $f : P \mapsto P + P'$.

a) Donnez un polynôme annulateur de d . Déduisez-en un polynôme annulateur de f .

b) Montrez que f est un automorphisme, puis exprimez son inverse à l'aide de f .

c) Vérifiez que $f^{-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k d^k$.

+**34) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = M + \text{tr}(M)A$.

a) Montrez que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Déterminez un polynôme annulateur de f de degré 2.

c) Dans quels cas f est-il un automorphisme? Calculez f^{-1} quand on peut.

d) Dans le cas contraire, vérifiez que f est un projecteur et déterminez ses éléments caractéristiques.

+**35) Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer qu'on a alors $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$.

Oraux de concours

1) **CCINP** Soit E un e.v. de dimension finie, p, q deux endomorphismes de E . On suppose que $p + q = \text{Id}_E$ et $\text{rg } p + \text{rg } q \leq \dim E$. Montrez que p et q sont deux projecteurs.

2) **IMT** Soit E un espace vectoriel de dimension ≥ 2 , f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g \circ f = f$.

a) Montrez que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.

b) Que peut-on dire des rangs de f , $f \circ g$ et $g \circ f$?

c) Montrez que $f \circ g$ est un projecteur sur $\text{Im } f$, parallèlement à un sous-espace contenant $\text{Ker } g$.

d) On suppose désormais qu'on a aussi $g \circ f \circ g = g$. Que dire des rangs de f et g ?

e) Montrez que $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } g$.

- 3) TPE** Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
- Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k$.
 - Montrez que s'il existe un entier p tel que $\text{Im } f^{p+1} = \text{Im } f^p$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Im } f^{p+k} \subset \text{Im } f^p$.
 - Déduisez-en que $\text{Im } f^{n+1} = \text{Im } f^n$.
- 4) TPE** Montrez que $P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et donnez son endomorphisme réciproque.
- 5) CEN** Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle, u, v deux endomorphismes de E .
- Montrez que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
 - Soit F un sous-espace de E , G, H deux supplémentaires de F dans E . On pose p le projecteur sur F parallèlement à G et q celui sur H parallèlement à F . Montrez que $\text{rg}(p + q) = \text{rg}(p) + \text{rg}(q)$.
- 6) CEN** Soit E un K -e.v. de dimension finie. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une famille libre de E^* (note : E^* est le K -e.v. des formes linéaires sur E) et $\psi \in E^*$.
- Montrez que $\psi \in \text{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ si et s.si $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i \subset \text{Ker } \psi$.
 - On suppose que $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Montrez que les conditions de la question précédente sont encore équivalentes à l'existence d'un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in E \quad |\psi(x)| \leq M \max_{1 \leq i \leq p} |\varphi_i(x)|$.
- 7) CCMP** Soit n, k deux entiers tels que $2 \leq k \leq n$. On pose $A_k = (a_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j}^{(k)} = 1$ si $i - j = k - 1$, les autres coefficients étant nuls.
- Calculez $A_k^T \cdot A_k$.
- Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $p \neq \text{Id}$.
- Justifiez que $\text{rg } p < n$.
 - Montrez que p est la composée de deux endomorphismes nilpotents.
- 8) CCMP** Soit E un K -e.v. de dimension finie, f, g deux endomorphismes de E . On suppose f inversible et g de rang 1. Montrez que $f + g$ est inversible si et s.si $\text{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.
- 9) CCMP** Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
- Montrez que $p + \text{rg}(I_n + AB) = n + \text{rg}(I_p + BA)$.
- 10) CCMP** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMB = 0\}$. Montrez que E est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donnez sa dimension.
- 11) CCMP** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résolvez dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $M = \text{com}(M)$.