

Correction de l'épreuve Mines MP 2 (année 2015)

Frédéric Morlot et Jean Nougayrède

Partie A - Norme d'opérateur d'une matrice

- 1) $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie et S^{n-1} est évidemment une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

C'est aussi une partie fermée; en effet, l'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne par la seconde inégalité triangulaire, donc elle est continue, puis S^{n-1} est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par cette dernière application.

Donc S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$.

$x \mapsto Mx$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, car linéaire en dimension finie, et $y \mapsto \|y\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Donc $x \mapsto \|Mx\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, donc en particulier sur le compact S^{n-1} , et à valeurs réelles.

Par le théorème des bornes atteintes, cette fonction admet un maximum ce qui justifie l'existence de $\|M\|_{op}$.

- 2) • $M \mapsto \|M\|_{op}$ est bien définie sur $M_n(\mathbb{R})$ et à valeurs réelles positives.

- Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Il existe $y \in S^{n-1}$ tel que $\|\lambda M\|_{op} = \|\lambda My\| = |\lambda| \|My\|$.

Ayant $\|My\| \leq \|M\|_{op}$ et $|\lambda| \geq 0$, on en déduit $\|\lambda M\|_{op} \leq |\lambda| \times \|M\|_{op}$.

Par ailleurs, il existe $z \in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{op} = \|Mz\|$.

Alors $|\lambda| \times \|M\|_{op} = \|\lambda Mz\| \leq \|\lambda M\|_{op}$ ce qui achève de démontrer la propriété d'homogénéité:

$$\|\lambda M\|_{op} = |\lambda| \times \|M\|_{op}$$

- Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M\|_{op} = 0$.

Alors l'ensemble $\{\|Mx\|, x \in S^{n-1}\}$ est à la fois inclus dans $\mathbb{R}^+$ et majoré par 0.

Donc $\forall x \in S^{n-1}, Mx = 0$.

La base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est formée de vecteurs de S^{n-1} donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, Me_k = 0$. Or Me_k est aussi la k -ième colonne de M . Donc $M = 0$.

- Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$.

Il existe $y \in S^{n-1}$ tel que $\|A + B\|_{op} = \|(A + B)y\| = \|Ay + By\|$.

Par l'inégalité triangulaire puis par définition de $\|\cdot\|_{op}$, $\|A + B\|_{op} \leq \|Ay\| + \|By\| \leq \|A\|_{op} + \|B\|_{op}$

Donc $M \mapsto \|M\|_{op}$ est bien une norme.

Enfin, soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$.

Lorsque $x = y$, l'inégalité à démontrer se réécrit $0 \leq 0$...

Supposons donc $x \neq y$.

Alors $\|x - y\| \neq 0$ et $\frac{x - y}{\|x - y\|} \in S^{n-1}$, donc :

$$\left\| M \cdot \frac{x - y}{\|x - y\|} \right\| \leq \|M\|_{op}.$$

Par positivité de $\|x - y\|$ et homogénéité de $\|\cdot\|$, on obtient l'inégalité souhaitée.

- 3) Dans cette question, $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure usuelle d'espace euclidien. La norme considérée est bien la norme euclidienne associée.

- Il existe $a \in \sigma(M)$ tel que $|a| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(M)\}$.

Il existe un vecteur propre (non nul) pour la valeur propre a que l'on note u et, quitte à le diviser par $\|u\|$, on peut le supposer unitaire.

Par propriété de $\|M\|_{op}$, $\|Mu\| \leq \|M\|_{op}$ donc $\|a.u\| \leq \|M\|_{op}$ soit $|a| = |a| \times \|u\| \leq \|M\|_{op}$

- M est symétrique réelle, donc par conséquence du théorème spectral, il existe une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de M . Notons $(a_1, \dots, a_n)$ la liste des valeurs propres associées à ces vecteurs propres.

Signalons que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k^2 \leq a^2$.

Il existe $y \in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{op} = \|My\|$.

Écrivons $y = y_1.v_1 + \dots + y_n.v_n$ la décomposition de y dans la base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$.

Alors $My = y_1 a_1 v_1 + \dots + y_n a_n v_n$ donc, par le théorème de Pythagore on a :

$$\|My\|^2 = a_1^2 y_1^2 + \dots + a_n^2 y_n^2 \leq a^2 \times \|y\|^2 = a^2$$

puis, par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ et positivité de la norme, $\|My\| \leq |a|$ soit $\|M\|_{op} \leq |a|$

- Conclusion : par double inégalité, $\boxed{\|M\|_{op} = |a|}$.

- 4) • commençons par supposer que $n \geq 2$.

J_n est non nulle donc de rang supérieur ou égal à 1 et toutes ses colonnes sont proportionnelles à la première donc $\text{rg}(J_n) \leq 1$.

Ainsi, $\text{rg}(J_n) = 1$ donc par conséquence du théorème du rang, $\boxed{\dim(\text{Ker}(J_n)) = n - 1}$.

Ainsi, 0 est valeur propre de J_n d'ordre de multiplicité $n - 1$ et le sous-espace propre associé est l'hyperplan d'équation cartésienne $x_1 + \dots + x_n = 0$

${}^t(1, \dots, 1)$ est clairement vecteur propre associé à la valeur propre n , donc n est valeur propre d'ordre de multiplicité au moins 1 et le sous-espace propre associé contient $\text{Vect}({}^t(1, \dots, 1))$.

On dispose donc de suffisamment de valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité, ce qui permet de conclure :

$\boxed{\sigma(J_n) = \{0, n\}}$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre n est exactement $\text{Vect}({}^t(1, \dots, 1))$.

- si $n = 1$, 1 est l'unique valeur propre et le sous-espace propre associé est $\mathbb{R}$.
- enfin, J_n est symétrique réelle, donc par application de la question précédente on a $\boxed{\|J_n\|_{op} = n}$ dans tous les cas

- 5) Dans cette question, on travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle et on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Le produit scalaire suivant se calcule facilement : $\langle e_i, Me_j \rangle = M_{i,j}$.

Par conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|M_{i,j}| = |\langle e_i, Me_j \rangle| \leq \|e_i\| \times \|Me_j\| = \|Me_j\| \leq \|M\|_{op},$$

car $(e_i, e_j) \in (S^{n-1})^2$. $\|M\|_{op}$ étant indépendant de i et de j , on obtient bien l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{\max\{|M_{i,j}|, (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2\} \leq \|M\|_{op}}.$$

- 6) • Déjà, tMM est une matrice symétrique réelle et ses valeurs propres sont positives ou nulles.

En effet, si $a \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de tMM , alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que ${}^tMMv = a.v$

ce qui donne par produit à gauche par ${}^t v$: $\|Mv\|^2 = a \times \|v\|^2$ puis $a = \frac{\|Mv\|^2}{\|v\|^2} \in \mathbb{R}^+$.

Ensuite, il existe $y \in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{op} = \|My\|$. Puis on a :

$$\begin{aligned} \|My\|^2 &= {}^t y {}^tMM y \\ &= \langle y, {}^tMM y \rangle \\ &\leq \|y\| \times \|{}^tMM\|_{op} \\ &= \|{}^tMM\|_{op} \end{aligned}$$

par conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de la définition de la norme d'opérateur. En notant alors b la plus grande valeur propre (donc aussi la plus grande en valeur absolue) de tMM , la question 3) montre que $\|My\|^2 \leq b$.

Par ailleurs, tMM étant diagonalisable, la trace de tMM est la somme de ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité ; et ces valeurs propres étant dans $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\|M\|_{op}^2 \leq b \leq \text{Tr}({}^tMM) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2.$$

Conclusion : par croissance de la racine carrée et positivité de $\|M\|_{op}$, on obtient l'inégalité souhaitée.

- **Condition nécessaire.** Supposons l'égalité dans l'inégalité précédemment démontrée.
Alors, en reprenant les notations précédentes, $b = \text{Tr}({}^tMM)$ ce qui montre que tMM admet 0 comme valeur propre d'ordre de multiplicité au moins $n - 1$. Donc $\text{rg}({}^tMM) \leq 1$.
Or $\text{Ker}(M) \subset \text{Ker}({}^tMM)$ et si $v \in \text{Ker}({}^tMM)$, alors $\|Mx\|^2 = {}^t x {}^tMMx = 0$ donc $Mx = 0$ donc $x \in \text{Ker}(M)$.
L'égalité des noyaux fournit alors l'égalité des rangs : $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^tMM)$.
Donc $\boxed{\text{rg}(M) \leq 1}$.
- **Condition suffisante:** Supposons que $\text{rg}(M) \leq 1$.
Alors, d'après ce qui précède, $\text{rg}({}^tMM) \leq 1$ donc 0 est au moins $n - 1$ fois valeurs propre de tMM et on peut noter $b \geq 0$ la dernière valeur propre de tMM . Notons que $\text{Tr}({}^tMM) = b$.
Or il existe $y \in S^{n-1}$ un vecteur propre de tMM associé à la valeur propre b , puis l'égalité :

$${}^tMM y = b.y$$

fournit $\|My\|^2 = b$ par multiplication à gauche par ${}^t y$. La définition de $\|M\|_{op}$ fournit alors $b \leq \|M\|_{op}^2$ donc $\sqrt{\text{Tr}({}^tMM)} \leq \|M\|_{op}$, ce qui donne

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2} \leq \|M\|_{op},$$

d'où l'égalité des deux membres car l'autre inégalité est toujours vérifiée.

- **Suite à la lecture d'un autre corrigé, voici une solution plus naturelle...**

Soit $x \in S^{n-1}$.

$$\text{Alors } \|Mx\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 \right) \times \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) = \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2$$

$$\text{Donc, par somme, } \|Mx\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2$$

Par croissance de la racine carrée et positivité de la norme :

$$\|Mx\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}$$

Le dernier majorant étant indépendant de x , par propriété de la borne supérieure, on en déduit :

$$\boxed{\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}}$$

- **Condition nécessaire.** Supposons l'égalité pour une certaine matrice M .

Il existe $x \in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{op} = \|Mx\|$

$$\text{Alors } 0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 - \|Mx\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 - \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2 \right).$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 - \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2 \geq 0$ et la somme de ces n réels est nulle.

$$\text{Donc pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 - \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2 = 0.$$

Les listes $(M_{i,1}, \dots, M_{i,n})$ et $(x_1, \dots, x_n)$ vérifient donc le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Ces deux vecteurs sont donc liés.

Ayant $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$, on en déduit que la i -ème ligne de M , $(M_{i,1}, \dots, M_{i,n})$, est proportionnelles à x ce qui démontre que $\text{rg}(M) \leq 1$

- *Condition suffisante.* Supposons $\text{rg}(M) \leq 1$.

Si $\text{rg}(M) = 0$, alors $M = 0$ donc $\|M\|_{op} = 0 = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{i,j}^2}$

Si $\text{rg}(M) = 1$, alors le sev de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de M est de dimension 1 et il existe un vecteur unitaire $v \in S^{n-1}$ et une liste de réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, l_i(M) = \alpha_i \cdot v$

$$\text{Alors } \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{i,j}^2} = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_i^2 v_j^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \times \|v\|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}.$$

Par ailleurs, un calcul facile donne $Mv = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ donc

$$\sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{i,j}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} = \|Mv\| \leq \|M\|_{op}$$

d'où l'égalité des deux membres car l'autre inégalité est toujours vérifiée.

- 7) • L'inégalité est immédiate par conséquence de la question précédente.
 • Soit A_n l'ensemble des matrices de Σ_n telles que $\|M\|_{op} = n$. Si $M \in A_n$, alors

$$n = \|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2} \leq n,$$

$$\text{donc } \|M\|_{op} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2} = n, \text{ d'où on tire } \text{rg}(M) \leq 1.$$

Or $M \neq 0$ car $\|0\|_{op} = 0$ et $n \neq 0$. Donc $\text{rg}(M) = 1$.

De plus, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (1 - M_{i,j}^2) = 0$ et chacun des termes de cette somme nulle est un réel positif ou nul.

$$\text{Donc } \boxed{\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, M_{i,j}^2 = 1}.$$

A_n est donc inclus dans l'ensemble des matrices à coefficients dans $\{-1, 1\}$ et de rang 1.

L'inclusion réciproque est immédiate (en partie conséquence de la question précédente qui donne le calcul de $\|M\|_{op}$ lorsque $\text{rg}(M) \leq 1$).

- Pour construire une matrice de A_n , on choisit d'abord la première colonne: 2^n possibilités. Cette première colonne étant non nulle, les autres colonnes de M lui sont proportionnelles, le coefficient de proportionnalité étant 1 ou -1 . Donc 2^{n-1} possibilités pour choisir les $n - 1$ colonnes restantes.
 Total: $\boxed{\text{Card}(A_n) = 2^{2n-1}}$.

Partie B - Variables aléatoires sous-gaussiennes

$$8) \text{ Soit } t \in \mathbb{R}. \text{ D'après le cours, on a } \text{ch } t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \text{ et } e^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \times n!}.$$

Soit $n \geq 1$. Pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ on a $0 < 2 \leq k$, donc par produit il vient: $0 < 2^n \leq \frac{(2n)!}{n!}$.

Or $\frac{t^{2n}}{2^n \times (2n)!} \geq 0$ donc $\frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{t^{2n}}{2^n \times n!}$ et, les séries étant convergentes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \times n!}.$$

Enfin, les deux termes de ces séries pour $n = 0$ sont égaux (à 1) donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$ ce qui

démontre que $\boxed{\text{ch}(t) \leq e^{t^2/2}}$.

- 9) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$.

Alors $\frac{1+x}{2}$ et $\frac{1-x}{2}$ sont deux réels positifs de somme 1.

La fonction $\exp$ étant convexe (de dérivée seconde positive) sur l'intervalle $\mathbb{R}$, intervalle contenant les deux points t et $-t$, une inégalité de convexité donne :

$$\exp\left(\frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t)\right) \leq \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$$

et cette inégalité se réécrit ainsi après simplification : $\boxed{\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)}$.

- 10) • Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons Y la variable aléatoire $Y = \frac{1+X}{2}e^t + \frac{1-X}{2}e^{-t} - \exp(tX)$
Par hypothèse, X est à valeurs dans $[-1, 1]$ donc Y est une variable aléatoire positive.
Par positivité et linéarité de l'espérance, et sachant que $E(X) = 0$, on obtient : $\text{ch}(t) - E(\exp(tX)) \geq 0$
Ayant également $\text{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$, on obtient $\boxed{E(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ce qui montre que X est 1-sous-gaussienne.
- Supposons maintenant que X est bornée par α , et posons $Y = \frac{1}{\alpha}X$. Alors Y est centrée (linéarité de l'espérance) et bornée par 1.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha \times t \in \mathbb{R}$ et d'après ce qui précède, $E(e^{\alpha t Y}) \leq \exp((\alpha t)^2/2)$,
inégalité qui se réécrit $\boxed{E(e^{tX}) \leq e^{\alpha^2 t^2/2}}$ et fournit le caractère α -sous-gaussien de X .

- 11) Soit $t \in \mathbb{R}$.
L'indépendance mutuelle des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ implique l'indépendance mutuelle des variables aléatoires $e^{t\mu_1 X_1}, \dots, e^{t\mu_n X_n}$. Ainsi, :

$$E\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right)\right) = E\left(\prod_{i=1}^n \exp(t\mu_i X_i)\right) = \prod_{i=1}^n E(\exp(t\mu_i X_i)).$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $0 \leq E(\exp(t\mu_i X_i)) \leq \exp(t^2 \mu_i^2 \alpha^2/2)$. Donc par produit :

$$E\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right)\right) \leq \prod_{i=1}^n \exp(t^2 \mu_i^2 \alpha^2/2) = \exp\left(\sum_{i=1}^n t^2 \mu_i^2 \alpha^2\right) = \exp(\alpha^2 t^2/2),$$

ce qui achève de démontrer que $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est α -sous-gaussienne.

- 12) • Soit $t > 0$.
Par conséquence de l' α -sous-gaussianité de X , e^{tX} est d'espérance finie. C'est également une variable aléatoire positive. Par ailleurs, $e^{t\lambda}$ est un réel strictement positif.
Par conséquence de l'inégalité de Markov :

$$P(e^{tX} \geq e^{t\lambda}) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{t\lambda}} \leq \exp(\alpha^2 t^2/2 - t\lambda),$$

car $e^{t\lambda} > 0$ et X est une variable aléatoire α -sous-gaussienne.

Or l'événement $\{e^{tX} \geq e^{t\lambda}\}$ est exactement l'événement $\{X \geq \lambda\}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle et stricte positivité de t .

Donc $\boxed{P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)}$.

- En choisissant $t = \frac{\lambda}{2\alpha}$ (qui est bien un réel strictement positif) dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Maintenant, on vérifie facilement que $-X$ est une variable aléatoire α -sous-gaussienne.

En effet, si $t \in \mathbb{R}$, alors $-t \in \mathbb{R}$, donc $E(\exp(-tX)) \leq \exp(\alpha^2(-t)^2/2)$, ce qui donne :

$$E(\exp(t(-X))) \leq \exp(\alpha^2 t^2/2).$$

Ainsi, d'après ce qui précède, $P(-X \geq \lambda) \leq \exp(-\lambda^2/(2\alpha^2))$.

Enfin, l'événement $\{|X| \geq \lambda\}$ est la réunion disjointe des événements $\{X \geq \lambda\}$ et $\{-X \geq \lambda\}$, donc la somme des deux inégalités précédemment obtenues fournit :

$$\boxed{P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)}.$$

- 13) • Supposons que X est d'espérance finie.
Alors, l'inégalité $0 \leq \lfloor X \rfloor \leq X$ assure que $\lfloor X \rfloor$ est aussi d'espérance finie, et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
D'après le résultat admis, la série de terme général $P(\lfloor X \rfloor \geq k)$ converge, et est de somme $E(\lfloor X \rfloor)$.
Or, pour tout entier naturel k et par conséquence de la définition de la partie entière, l'événement $\{\lfloor X \rfloor \geq k\}$ est exactement l'événement $\{X \geq k\}$.
Donc $P(X \geq k) = P(\lfloor X \rfloor \geq k)$ ce qui assure la convergence de la série de terme général $P(X \geq k)$
et donne également $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) = E(\lfloor X \rfloor)$.
L'inégalité $\lfloor X \rfloor \leq X \leq \lfloor X \rfloor + 1$, et la croissance et la linéarité de l'espérance fournissent alors l'inégalité souhaitée (en notant que $E(1) = 1 \dots$) :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)}.$$

- Supposons que la série de terme général $P(X \geq k)$ converge.
Alors, ayant $P(\lfloor X \rfloor \geq k) = P(X \geq k)$ pour tout k entier et $\lfloor X \rfloor$ à valeur dans $\mathbb{N}$, la variable aléatoire $\lfloor X \rfloor$ est d'espérance finie donc $\lfloor X \rfloor + 1$ également.
Ayant $0 \leq X \leq \lfloor X \rfloor + 1$, on en déduit que X est d'espérance finie.
- 14) • Soit $k \geq 2$.

L'événement $\{\exp(\beta^2 X^2/2) \geq k\}$ est exactement l'événement $\left\{ |X| \geq \sqrt{\frac{2 \ln(k)}{\beta^2}} \right\}$ par stricte croissance des fonctions qui vont bien et stricte positivité des réels qui vont bien.
Le réel $\sqrt{\frac{2 \ln(k)}{\beta^2}}$ étant strictement positif, on peut appliquer l'inégalité de la question 12) :

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2} \times \frac{2 \ln(k)}{\beta^2}\right) = 2k^{-\eta},$$

en posant $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$.

- Lorsque $k = 1$, l'inégalité est évidente car elle s'écrit $P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2$.
• En supposant $0 < \alpha\beta < 1$, on a alors $1 < (\alpha\beta)^{-2} = \eta$ par stricte décroissance de $u \mapsto u^{-2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui assure la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k^\eta}$. L'inégalité :

$$0 \leq P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq \frac{2}{k^\eta}$$

assure alors la convergence de la série de terme général $P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right)$.

D'après la question précédente, $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est donc d'espérance finie et :

$$\begin{aligned} E\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) &\leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^\eta} \\ &= \boxed{1 + 2\zeta(\eta)}. \end{aligned}$$

Partie C - Recouvrements de la sphère

- 15) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'on ne puisse pas trouver de recouvrement fini. Construisons alors par récurrence une suite (a_n) à valeurs dans K de la manière suivante :
- initialisation : puisque $K \neq \emptyset$, on peut choisir $a_0 \in K$

- supposons avoir construit $a_0, \dots, a_n$. Puisque $K \not\subset \bigcup_{k=0}^n B_{a_k, \varepsilon/2}$, on peut choisir :

$$a_{n+1} \in K \setminus \left(\bigcup_{k=0}^n B_{a_k, \varepsilon/2} \right).$$

Puis par compacité de K , on peut trouver une extraction φ telle que la suite $a_{\varphi(n)}$ tende vers une limite $a \in K$. En particulier, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \|a - a_{\varphi(n)}\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Remarquons alors que par l'inégalité triangulaire on a $\|a_{\varphi(N+1)} - a_{\varphi(N)}\| \leq \varepsilon/2$, d'où $a_{\varphi(N+1)} \in B_{a_{\varphi(N)}, \varepsilon/2}$. Or puisque $\varphi(N+1) > \varphi(N)$, par construction on a $a_{\varphi(N+1)} \notin B_{a_{\varphi(N)}, \varepsilon/2}$, d'où contradiction.

- 16) On se donne un ensemble A du même type que dans la question précédente. Puisque $\Lambda \subset K$, on peut construire une application $\theta : \Lambda \rightarrow A$, qui à $x \in \Lambda$ associe un $a \in A$ tel que $x \in B_{a, \varepsilon/2}$. Montrons que θ est injective, et pour cela donnons-nous $x \neq y$ dans Λ . Si on avait $\theta(x) = \theta(y) = a$, alors par l'inégalité triangulaire on aurait :

$$\|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a - y\| \leq \varepsilon,$$

ce qui est absurde. Ainsi, θ est bien injective. Ensuite, on peut par exemple remarquer que :

$$\Lambda = \theta^{-1}(A) = \bigcup_{a \in A} \theta^{-1}(\{a\}).$$

Or par injectivité de θ , chaque image réciproque $\theta^{-1}(\{a\})$ est soit vide, soit égale à un singleton. Dans tous les cas elle est finie. Donc comme union finie d'ensembles finis, Λ est finie ; son cardinal vérifie :

$$\text{Card}(\Lambda) \leq \sum_{a \in A} \text{Card}(\theta^{-1}(\{a\})) \leq \sum_{a \in A} 1 = \boxed{\text{Card}(A)}.$$

Si Λ est de cardinal maximal, supposons que : $K \not\subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$. On pourrait alors choisir :

$$b \in K \setminus \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon} \subset K \setminus \Lambda.$$

L'ensemble $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{b\}$ serait de cardinal strictement supérieur à $\text{Card}(\Lambda)$, et vérifierait :

$$\forall (x, y) \in \tilde{\Lambda}^2, x \neq y \Rightarrow \|x - y\| > \varepsilon.$$

On aurait alors une contradiction sur la maximalité de $\text{Card}(\Lambda)$. Donc $\boxed{K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}}$.

- 17) Soit $a \in \Lambda$, et montrons que $\boxed{B_{a, \varepsilon/2} \subset B_{0, 1+\varepsilon/2}}$. Pour cela, donnons-nous $x \in B_{a, \varepsilon/2}$. Par l'inégalité triangulaire on a :

$$\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1,$$

car $a \in S^{n-1}$. Par ailleurs, donnons-nous $a \neq b$ dans Λ et supposons qu'il existe un $x \in B_{a, \varepsilon/2} \cap B_{b, \varepsilon/2}$. Alors par l'inégalité triangulaire on aurait :

$$\|b - a\| \leq \|b - x\| + \|x - a\| \leq \varepsilon,$$

ce qui est absurde. Donc les $B_{a, \varepsilon/2}$ sont deux à deux disjointes pour $a \in \Lambda$. Puisque Λ est fini, on peut écrire :

$$\mu(B_{0, 1+\varepsilon/2}) \geq \mu\left(\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon/2}\right) = \sum_{a \in \Lambda} \mu(B_{a, \varepsilon/2}).$$

On en déduit : $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \times \text{Card}(\Lambda)$, soit encore : $\boxed{\text{Card}(\Lambda) \leq \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n}$.

18) Dans cette question, on fixe $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Rappelons ensuite que S^{n-1} est compact (cf. question A-1)). Il est bien sûr non vide, puisqu'il contient par exemple $e_1 = {}^t(1, 0, \dots, 0)$. On invoque ensuite les différentes questions de cette partie les unes après les autres :

- la question 15) montre qu'il existe un ensemble fini $A \subset S^{n-1}$ tel que : $S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in A} B_{a, \varepsilon/2}$.
- puis on considère l'ensemble :

$$X = \{\text{Card}(\Lambda)/\Lambda \subset S^{n-1} \text{ et } \forall (x, y) \in \Lambda^2, x \neq y \Rightarrow \|x - y\| > \varepsilon\}$$

La question 16) montre qu'un tel ensemble Λ est nécessairement fini, si bien que la définition de X est légitime. De plus $\Lambda = \{e_1\}$ convient, donc l'ensemble X est non vide. Enfin, la question 16) montre qu'il est majoré, donc il admet un plus grand élément. Λ_n associé est alors de cardinal maximal, et une nouvelle invocation de la question 16) montre que :

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a, \varepsilon}.$$

- la question 17) montre alors que : $\text{Card}(\Lambda) \leq \left(\frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon}\right)^n = 5^n$.

Partie D - Norme d'une matrice aléatoire

19) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et remarquons que : $y_i = \sum_{j=1}^n M_{i,j}^{(n)} x_j$, avec $\sum_{j=1}^n x_j^2 = 1$.

De plus, les variables aléatoires $(M_{i,1}^{(n)}, \dots, M_{i,n}^{(n)})$ sont mutuellement indépendantes, car elles forment une sous-famille d'une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

La question B-11) montre alors immédiatement que y_i est α -sous-gaussienne. L'inégalité d'Orlicz (admise à la fin de la partie B) montre alors que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E(e^{\gamma y_i^2}) \leq 5.$$

L'indépendance mutuelle des $M_{i,j}^{(n)}$ fournit l'indépendance mutuelle des y_i , car chaque y_i s'écrit comme combinaison linéaire des $M_{i,j}^{(n)}$, et les différentes combinaisons linéaires ont des supports deux à deux disjoints. Donc par produit on obtient :

$$E(e^{\gamma \|y\|^2}) \leq 5^n.$$

Soit maintenant $r > 0$. Par stricte croissance de l'exponentielle et stricte positivité de γ on a :

$$P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) = P(e^{\gamma \|y\|^2} \geq e^{\gamma r^2 n}).$$

Puis en utilisant l'inégalité de Markov il vient : $P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) \leq (5e^{-\gamma r^2})^n$.

20) Il existe $t \in S^{n-1}$ tel que : $\|M^{(n)}t\| = \|M^{(n)}\|_{op}$, puis il existe $a \in \Lambda_n$ tel que : $t \in B_{a, 1/2}$. Par la question A-2) il vient alors :

$$\|M^{(n)}\|_{op} \leq \|M^{(n)}t - M^{(n)}a\| + \|M^{(n)}(a)\| \leq \frac{1}{2}\|M^{(n)}\|_{op} + \|M^{(n)}(a)\|,$$

soit encore : $\|M^{(n)}(a)\| \geq \frac{1}{2}\|M^{(n)}\|_{op}$.

Maintenant, soit $r > 0$, et supposons que $\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$. Alors on obtient immédiatement :

$$\|M^{(n)}(a)\| \geq r\sqrt{n}.$$

En écrivant :

$$\{\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} \{\|M^{(n)}(a)\| \geq r\sqrt{n}\},$$

et en utilisant le fait que Λ_n est fini, on obtient :

$$\begin{aligned} P(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) &\leq \sum_{a \in \Lambda_n} P(\|M^{(n)}(a)\| \geq r\sqrt{n}) \\ &\leq \sum_{a \in \Lambda_n} \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n && \text{d'après 19)} \\ &= \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n \times \text{Card}(\Lambda_n) \\ &\leq \boxed{\left(25e^{-\gamma r^2}\right)^n} && \text{d'après C-17).} \end{aligned}$$