Problème 1 - Mines-Ponts MP - 2015

L'objectif de ce problème est d'étudier une inégalité de concentration pour la norme opérationnelle d'une matrice aléatoire dont les coefficients sont mutuellement indépendants et « uniformément sous-gaussiens ».

Soit n un entier strictement positif. On identifie $\mathbb{R}^n$ à l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées réelles. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ dans $\mathbb{R}^n$, on note :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i^2}$$

La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est notée $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x\| = 1\}$. On identifie une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé et on note $\sigma(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

*Les parties **I**, **II** et **III** sont mutuellement indépendantes.*

I. Norme d'opérateur d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 1. Montrer que S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$ et en déduire l'existence de :

$$\|M\|_{\text{op}} = \max\{\|Mx\| \ / \ x \in S^{n-1}\}$$

Q 2. Montrer que l'application qui à $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\|M\|_{\text{op}}$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité : $\|Mx - My\| \leqslant \|M\|_{\text{op}} \|x - y\|$.

Q 3. Si M est symétrique, établir l'égalité $\|M\|_{\text{op}} = \max\{|\lambda| \ / \ \lambda \in \sigma(M)\}$. On pourra commencer par le cas où M est diagonale.

On note J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Q 4. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de J_n en précisant la dimension des espaces propres. En déduire la valeur de $\|J_n\|_{\text{op}}$.

Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 5. Démontrer l'inégalité $\|M\|_{\text{op}} \geqslant \max\{|M_{i,j}| \ / \ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$.

Q 6. Établir que :

$$\|M\|_{\text{op}} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(M_{i,j})^2}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de M pour que cette inégalité soit une égalité.

On note Σ_n l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $|M_{i,j}| \leqslant 1$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Q 7. Montrer que pour tout $M \in \Sigma_n$, $\|M\|_{\text{op}} \leqslant n$. Caractériser et dénombrer les matrices M de Σ_n pour lesquelles $\|M\|_{\text{op}} = n$.

II. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $\alpha > 0$, on dit qu'une variable aléatoire X est *α-sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad E\left(\exp(tX)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

On rappelle la notation : $\text{ch}(t) = \dfrac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

Q 8. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}(t) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$. On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière sur $\mathbb{R}$.

Q 9. Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$$

Q 10. Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne.

En déduire que si X est bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

Q 11. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes, et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\mu_i)^2 = 1$.

Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mu_i X_i$ est aussi α-sous-gaussienne.

Q 12. Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$$

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X \geqslant k)$ converge et que dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k)$$

Q 13. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geqslant k)$ converge et que dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) \leqslant E(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k)$$

On pourra pour cela considérer la partie entière $\lfloor X \rfloor$.

Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

Q 14. Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pour tout entier $k > 0$:

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}$$

où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$.

En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp\left(\dfrac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

En particulier, en prenant $\alpha\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en utilisant l'inégalité $1 + 2\zeta(2) \leqslant 5$ (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si X est une variable aléatoire α-sous-gaussienne, on a *l'inégalité d'Orlicz* :

$$\boxed{E\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leqslant 5.}$$

III. Recouvrements de la sphère

Si $a \in \mathbb{R}^n$, on note $B_{a,r} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x - a\| \leqslant r\}$ la boule fermée de centre a et de rayon r. Soit K une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^n$, et soit $\varepsilon > 0$.

Q 15. Montrer que l'on peut trouver un sous ensemble fini A de K tel que :

$$K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$$

On pourra raisonner par l'absurde en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Q 16. Soit Λ un sous ensemble de K tel que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x-y\| > \varepsilon$. Montrer que Λ est fini et que son cardinal est majoré par celui d'un ensemble A du type considéré à la question précèdente. Si de plus Λ est de cardinal maximal, montrer que :

$$K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\varepsilon}$$

On admet l'existence d'une fonction μ, appelée *volume*, définie sur l'ensemble des parties compactes de $\mathbb{R}^n$ et vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Pour tout vecteur a de $\mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $r > 0$, $\mu\left(B_{a,r}\right) = r^n$.

(ii) Pour toute famille $K_1, \ldots, K_m$ de compacts de $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjoints on a :

$$\mu\left(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} K_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu(K_i)$$

(iii) Pour tous compacts K, K' de $\mathbb{R}^n$, $K \subset K'$ implique $\mu(K) \leqslant \mu(K')$.

Soit Λ une partie finie de S^{n-1} telle que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x-y\| > \varepsilon$.

Q 17. Vérifier que les boules $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ pour $a \in \Lambda$ sont toutes contenues dans $B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$.

Montrer alors que le cardinal de Λ est majoré par $\left(\dfrac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$.

Q 18. Justifier l'existence d'une partie finie Λ_n de S^{n-1}, de cardinal majoré par 5^n, et telle que :

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}$$

IV. Norme d'une matrice aléatoire

On fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on pose $\gamma = \dfrac{1}{4\alpha^2}$.

Soit n un entier strictement positif. On définit une famille de variables aléatoires réelles $M_{i,j}^{(n)}$ indexées par $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes. On note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire $(M_{i,j}^{(n)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Si $x \in S^{n-1}$, on note $y = M^{(n)}x$ qui est ainsi un vecteur aléatoire dont les composantes $y_1, \ldots, y_n$ sont des variables aléatoires réelles.

Q 19. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la variable aléatoire y_i est α-sous-gaussienne.

En déduire que : $E\left(\exp(\gamma\,\|y\|^2)\right) \leqslant 5^n$ et que pour tout réel $r > 0$:

$$P\left(\|y\| \geqslant r\sqrt{n}\right) \leqslant \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n$$

Q 20. Soit Λ_n une partie de S^{n-1} vérifiant les conditions de la question **18)**. Pour tout réel $r > 0$, montrer que $\left\|M^{(n)}\right\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}$ implique l'existence d'un $a \in \Lambda_n$ tel que : $\left\|M^{(n)}a\right\| \geqslant r\sqrt{n}$.

En déduire que

$$P\left(\left\|M^{(n)}\right\|_{\mathrm{op}} \geqslant 2r\sqrt{n}\right) \leqslant \left(25e^{-\gamma r^2}\right)^n$$