

Corrigé du sujet Maths X-ENS (B) MP 2022

Laurent Chaumard

PREMIÈRE PARTIE

- 1/ (a) Pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, la suite $\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)_{n \geq 1}$ existe, et $\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \frac{2x}{x^2 - n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2x}{n^2}$. Puisque la suite $\left(-\frac{2x}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ est de signe constant et est de plus le terme général d'une série de Riemann convergente (à un facteur multiplicatif près), la série de terme général $\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)_{n \geq 1}$ est convergente, si bien que la série définissant $g(x)$ est convergente.

- (b) L'ensemble de définition de ces deux fonctions est bien symétrique par rapport à 0 puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, si x n'est pas un entier, $-x$ n'en est pas un non plus. Alors

$$g(-x) = \frac{1}{-x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{-x+n} + \frac{1}{-x-n} \right) = -\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = -g(x).$$

g est donc bien impaire. f l'est clairement aussi puisque $\cos$ est paire et $\sin$ est impaire. Ainsi, D est finalement impaire en tant que différence de deux fonctions qui le sont.

- (c) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

- Puisque $\cos(\pi(x+1)) = \cos(\pi x + \pi) = -\cos(\pi x)$, et $\sin(\pi(x+1)) = \sin(\pi x + \pi) = -\sin(\pi x)$, $f(x+1) = f(x)$, et f est bien 1-périodique.
- Pour établir la 1-périodicité de la fonction g , revenons aux sommes partielles de la série de somme $g(x+1) - \frac{1}{x+1}$, soit $\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{(x+1)+n} + \frac{1}{(x+1)-n} \right)$. Soit $N \in \mathbf{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{(x+1)+n} + \frac{1}{(x+1)-n} \right) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{x+(n+1)} + \frac{1}{x-(n-1)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+N+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-N}. \end{aligned}$$

En faisant maintenant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$g(x+1) - \frac{1}{x+1} = \left[g(x) - \frac{1}{x} \right] - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}, \text{ soit } g(x+1) = g(x).$$

A nouveau, l'ensemble des fonctions 1-périodiques étant un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, D est aussi 1-périodique.

- (d) Du fait de la périodicité, il suffit ici de prouver la continuité de ces deux fonctions sur l'ensemble $]0, 1[$, pour conclure à la continuité sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. De plus, la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur $]0, 1[$ nous permet de nous contenter de prouver la continuité de f et de g .

- Elle est évidente pour f car $\cos$ et $\sin$ sont continues sur $]0, \pi[$ et $\sin$ ne s'y annule pas.
- Montrons celle de g . Notons déjà que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$ est continue sur $]0, 1[$. De plus, si on se donne un segment $[a, b]$ inclus dans $]0, 1[$, pour tout $(x, n) \in [a, b] \times \mathbf{N}^*$, nous pouvons écrire

$$\left| \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right| = \frac{2x}{|x^2 - n^2|} = \frac{2x}{n^2 - x^2} \leq \frac{2}{n^2 - b^2}, \text{ donc } \|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{2}{n^2 - b^2}.$$

Comme $\frac{2}{n^2 - b^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$, et que cette suite est positive et le terme général d'une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty, [a, b]}$ est convergente, si bien que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, 1[$. Le théorème de continuité sous le signe $\sum$ nous permet alors d'affirmer que $x \mapsto g(x) - \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1[$, et donc g aussi.

2/ (a) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Notons déjà que ni $x/2$ ni $(x+1)/2$ ne sont des entiers. Alors

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi \frac{\cos\left(\pi \frac{x}{2}\right) \sin\left(\pi \frac{x+1}{2}\right) + \cos\left(\pi \frac{x+1}{2}\right) \sin\left(\pi \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\pi \frac{x}{2}\right) \sin\left(\pi \frac{x+1}{2}\right)} \\ &= \pi \frac{\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\pi \frac{x}{2}\right) \cos\left(\pi \frac{x}{2}\right)} \text{ car } \begin{cases} \cos a \sin b + \cos b \sin a = \sin(a+b) \\ \sin(a + \pi/2) = \cos \end{cases} \\ &= 2\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = 2f(x) \text{ car } 2 \sin a \cos a = \sin(2a). \end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. A nouveau, notons pour tout $N \geq 1$, $S_N(x) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right)$. Alors,

$$\begin{aligned} S_N\left(\frac{x}{2}\right) + S_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\frac{x}{2}+n} + \frac{1}{\frac{x}{2}-n} \right) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\frac{x+1}{2}+n} + \frac{1}{\frac{x+1}{2}-n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{2}{x+2n} + \frac{2}{x-2n} \right) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{2}{x+2n+1} + \frac{2}{x-2n+1} \right). \end{aligned}$$

Cette somme est égale $2 \sum_{n \in I} (x+n)^{-1}$, où I est l'ensemble des entiers $[-2N, -1] \cup [2, 2N+1]$. Ainsi,

$$S_N\left(\frac{x}{2}\right) + S_N\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{2N} \left(\frac{2}{x+n} + \frac{2}{x-n} \right) - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{2N+1}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons ainsi

$$\left[g\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{x} \right] + \left[g\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{2}{x+1} \right] = 2 \left[g(x) - \frac{1}{x} \right] - \frac{2}{x+1} + 0,$$

soit exactement l'égalité attendue.

3/ (a) ► Effectuons un développement limité de f au voisinage de 0. Il est notoire que $\tan$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de 0, qu'elle est impaire et vérifie de plus $\tan 0 = 0$, $\tan'(0) = 1$. D'après la formule de Taylor-Young, $\tan t = t + o(t^2)$ quand $t \rightarrow 0$. Alors, quand $x \rightarrow 0$,

$$f(x) = \frac{\pi}{\pi x + o(x^2)} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + o(x)} = \frac{1}{x} [1 - o(x)] = \frac{1}{x} + o(1).$$

► Reprenons les arguments de la question 1d. Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est continue sur $J = [-0,5, 0,5]$ et pour tout $x \in J$, $|f_n(x)| \leq \frac{2}{n^2 - 0,5^2}$, si bien que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur J . Ainsi sa somme $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue en 0. Comme elle est de plus nulle en 0, on en déduit que $g(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = o(1)$ quand $x \rightarrow 0$

Finalement, $D(x) = f(x) - g(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} + o(1) \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{x} + o(1) \right\rfloor = o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, et D se prolonge bien en une fonction continue en 0.

Par périodicité de D , en posant $\tilde{D}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a

$$\lim_{x \rightarrow n} \tilde{D}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{D}(n + \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{D}(\epsilon) = \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{D}(x) = 0 = \tilde{D}(0),$$

si bien que $\tilde{D}$ est continue en tout point de $\mathbf{Z}$. Comme elle est de plus continue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, elle est bien continue sur $\mathbf{R}$.

- (b) $\tilde{D}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc elle y admet un maximum, ce qui était demandé.

Montrons l'égalité demandée par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, sachant que nous venons de faire l'initialisation.

Supposons donc qu'il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M$. Il est clair que $\tilde{D}$ vérifie la même équation fonctionnelle que celle vérifiée par f et g et qui apparaît dans la question 2. En posant $x = \frac{\alpha}{2^n}$, nous obtenons l'égalité

$$\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) + \tilde{D}\left(\frac{2^n + \alpha}{2^{n+1}}\right) = 2\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right), \text{ soit } \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \tilde{D}\left(\frac{2^n + \alpha}{2^{n+1}}\right) - \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right).$$

Or comme $\tilde{D}$ atteint en $\frac{\alpha}{2^n}$ son maximum sur $\mathbf{R}$ d'après l'hypothèse de récurrence (par 1-périodicité à nouveau), le premier terme de cette égalité est positif, et le second est négatif. Ils sont donc tous les deux nuls et ainsi $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M$.

- 4/ En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, et en utilisant la continuité de $\tilde{D}$ en 0, nous obtenons $M = \tilde{D}(0) = 0$. Mais comme M est le maximum de $\tilde{D}$, ceci signifie que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\tilde{D}(x) \leq 0$. Or $\tilde{D}$ étant impaire d'après la question 1b, $\tilde{D}(x) = -\tilde{D}(-x) \geq 0$ également, si bien que $\tilde{D}$ est la fonction nulle. On en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $f(x) = g(x)$, soit

$$\pi x \cotan(\pi x) = x f(x) = x g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{x+n} + \frac{x}{x-n} \right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2}.$$

- 5/ (a) Soit x non nul dans $] -2\pi, 2\pi[$. Alors $t = x/2\pi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, et d'après la question 4,

$$\pi t \cotan(\pi t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^2}{t^2 - n^2}, \text{ soit } \frac{x}{2} \cotan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 - n^2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left|\frac{x}{2\pi n}\right| < 1$, $\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}$, et donc $\frac{x}{2} \cotan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}$.

Puisque la famille $\left(\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}\right)_{(n,k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*}$ est positive, le théorème de Fubini discret permet de déduire de cette égalité d'une part qu'elle est sommable, d'autre part que sa somme est égale à $2\left(-\frac{x}{2} \cotan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)$, ainsi que cette autre expression de sa somme :

$$\frac{x}{2} \cotan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta(2k) \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2k} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} x^{2k}.$$

(b) Pour les mêmes valeurs de x ,

$$\begin{aligned}
 \frac{ix}{e^{ix}-1} - 1 + \frac{ix}{2} &= \frac{ix}{2} \left[\frac{2}{e^{ix}-1} + 1 \right] - 1 = \frac{ix}{2} \frac{e^{ix}+1}{e^{ix}-1} - 1 \\
 &= \frac{ix}{2} \frac{e^{ix/2} + e^{-ix/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} - 1 = \frac{ix}{2} \frac{2 \cos(x/2)}{2i \sin(x/2)} - 1 \\
 &= \frac{x}{2} \cotan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \text{ d'après les formules d'Euler,} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} x^{2k} \text{ d'après 5a.}
 \end{aligned}$$

6/ ▶ Notons $\varphi : z \in \mathbb{C} \mapsto 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} z^{2k}$. Nous venons de montrer que pour tout réel $x \in]0, 2\pi[$, la série définissant $h(ix)$ était convergente. Comme c'est une série entière, son rayon de convergence est par conséquent au moins égal à 2π , si bien que h est définie sur le disque D ouvert de centre 0 et de rayon 2π .

▶ La fonction $H : z \in D \mapsto (e^z - 1)\varphi(z) - z$ est alors aussi la somme d'une série entière sur D , car $z \mapsto H(z) + z$ est le produit de deux sommes de séries entières de rayon supérieur ou égal à 2π .

▶ Enfin, la question 5b prouve de plus que pour tout $x \in [0, 2\pi[$, $H(ix) = 0$, égalité qui implique la nullité de tous les coefficients de la série entière définissant H , et donc la nullité de H sur D . En effet, dans le cas contraire, en notant $H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, il existerait $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p \neq 0$ et $a_k = 0, \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, et alors

$$H(ix) = a_p (ix)^p \left[1 + \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_p} (ix)^{n-p} \right] \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} a_p (ix)^p,$$

et H serait non nulle sur un voisinage de 0.

7/ (a) h de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -2\pi, 2\pi[$ en tant que somme d'une série entière d'après la question 6, et en dehors de cet intervalle en tant que rapport de deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Enfin, d'après la formule de Taylor pour les séries entières, on sait que $\frac{h^{(2n)}(0)}{(2n)!}$ est le coefficient d'indice $2n$ de cette série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) D'après la question 6, pour tout $z \in D, z = (e^z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \right)$. Puisque ces deux séries entières ont un rayon de convergence plus grand que 2π , d'après le théorème sur les produits de Cauchy, $z = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} \right) z^n$. Enfin, de l'unicité du développement en série entière, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) En posant $n = 23$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\frac{1}{3!} + \frac{-1/2}{2} + \frac{b_2}{2} = 0, \text{ soit } b_2 = \frac{1}{6}.$$

En faisant de même avec $n = 4$ puis $n = 6$, on obtient $b_4 = -\frac{1}{30}$ et $b_6 = \frac{1}{42}$.

On en déduit, toujours avec la question 7b, que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ et $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

DEUXIÈME PARTIE

- 8/ (a) Une mesure sur l'espace probabilisable $(E, \mathcal{P}(E))$ est une fonction de $\mathcal{P}(E)$ dans $[0, 1]$, donc une fonction bornée de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbf{R}$.
- (b) C'est du cours : la norme infinie sur l'espace des fonctions bornées d'un ensemble X dans $\mathbf{R}$ est une norme.
- 9/ C'est classique : toute suite de fonctions convergeant uniformément sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ converge simplement sur $\mathcal{P}(E)$ vers sa limite uniforme. Or pour tout $x \in E, \{x\} \in \mathcal{P}(E)$.
- 10/ (a) Soit $\epsilon > 0$. D'après le théorème de la limite monotone probabiliste, $\mu(\{x_1, \dots, x_p\}) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \mu(E) = 1$, donc il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $\mu(\{x_1, \dots, x_p\}) \geq 1 - \epsilon$. Posons $F_\epsilon = \{x_1, \dots, x_p\}$. D'après l'hypothèse (1), pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe $N_k \in \mathbf{N}$ tel que

$$\text{pour tout entier } n \geq N_k, |\mu_n(x_k) - \mu(x_k)| < \frac{\epsilon}{p}.$$

Il suffit de poser $N_\epsilon = \max_{1 \leq k \leq p} N_k$ pour obtenir que pour tout entier $n \geq N_\epsilon$,

$$\sum_{x \in F_\epsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| < \sum_{x \in F_\epsilon} \frac{\epsilon}{p} = \epsilon.$$

- (b) En notant F^c le complémentaire de F ,

$$\begin{aligned} |\mu_n(A) - \mu(A)| &= |\mu_n(A \cap F_\epsilon) - \mu(A \cap F_\epsilon) + \mu_n(A \cap F_\epsilon^c) - \mu(A \cap F_\epsilon^c)| \\ &\leq |\mu_n(A \cap F_\epsilon) - \mu(A \cap F_\epsilon)| + |\mu_n(A \cap F_\epsilon^c) - \mu(A \cap F_\epsilon^c)| \text{ par inégalité triangulaire,} \\ &\leq |\mu_n(A \cap F_\epsilon) - \mu(A \cap F_\epsilon)| + \mu_n(F_\epsilon^c) + \mu(F_\epsilon^c) \text{ par croissance des mesures,} \end{aligned}$$

ce qui constitue la première inégalité demandée. Majorons chacun de ces trois termes.

- Le premier terme se majore ainsi :

$$|\mu_n(A \cap F_\epsilon) - \mu(A \cap F_\epsilon)| = \left| \sum_{x \in A \cap F_\epsilon} (\mu_n(x) - \mu(x)) \right| \leq \sum_{x \in A \cap F_\epsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| \leq \sum_{x \in F_\epsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| < \epsilon.$$

- Le troisième ainsi : $\mu(F_\epsilon^c) = 1 - \mu(F_\epsilon) < \epsilon$.

- Enfin, le deuxième :

$$\begin{aligned} \mu_n(F_\epsilon^c) &= 1 - \mu_n(F_\epsilon) = [1 - \mu(F_\epsilon)] + \mu(F_\epsilon) - \mu_n(F_\epsilon) = [\mu(F_\epsilon^c)] + \mu(F_\epsilon) - \mu_n(F_\epsilon) \\ &\leq [\mu(F_\epsilon^c)] + |\mu(F_\epsilon) - \mu_n(F_\epsilon)| \leq \epsilon + \left| \sum_{x \in F_\epsilon} (\mu_n(x) - \mu(x)) \right| \\ &\leq \epsilon + \sum_{x \in F_\epsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Leur somme est donc bien majorée par 4ϵ .

- (c) On montrera le sens direct dans la question 9. Dans la question 10, nous avons montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existait $N_\epsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ et tout entier $n \geq N_\epsilon$, $|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq 4\epsilon$, soit que pour tout $\epsilon > 0$, il existait $N_\epsilon \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N_\epsilon$, $\|\mu_n - \mu\| \leq 4\epsilon$. C'est bien la définition de la convergence de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vers μ pour la norme $\|\cdot\|$.

- 11/ Non, cette suite ne converge pas. En effet, dans le cas contraire, il existerait une mesure μ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\delta_k(\{x_n\}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \mu(x_n).$$

Ceci impliquerait la nullité de $\mu(x_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ puisque la suite $(\delta_k(\{x_n\}))_{k \geq 1}$ stationne à 0. Donc $\mu(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(x_n)$ serait nul, ce qui est impossible.

- 12/ (a) Construisons cette suite par récurrence sur k .

- La suite $(\mu_n(x_1))_{n \geq 1}$ est à valeurs dans le compact $[0, 1]$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi_1 : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ strictement croissante telle que $(\mu_{\varphi_1(n)}(x_1))_{n \geq 1}$ converge.
- Supposons qu'il existe $k \geq 1$ tel que pour tout entier $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \geq 1}$ converge. La suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_{k+1}))_{n \geq 1}$ étant à valeurs dans le compact $[0, 1]$, toujours d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi_{k+1} : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ strictement croissante telle que $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k \circ \varphi_{k+1}(n)}(x_{k+1}))_{n \geq 1}$ converge.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k \circ \varphi_{k+1}(n)}(x_i))_{n \geq 1}$ converge également en tant que suite extraite de la suite convergente $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \geq 1}$.

On a bien prouvé que pour tout entier $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k \circ \varphi_{k+1}(n)}(x_i))_{n \geq 1}$ converge.

- (b) Soit $k \geq i$. Notons pour y voir plus clair $(\alpha_i(n))_{n \geq 1}$ la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_i(n)}(x_i))_{n \geq 1}$. Notons que cette suite est convergente d'après la question précédente. Notons $\mu_\infty(x_i)$ sa limite. Alors

$$(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \geq 1} = (\alpha_i(\varphi(n)))_{n \geq 1} \text{ où } \varphi = \varphi_{i+1} \circ \varphi_{i+2} \circ \dots \circ \varphi_k.$$

φ , en tant que composée d'extractrices, est également une extractrice, si bien que la suite $(\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i))_{n \geq 1}$ est une suite extraite de la suite convergente $(\alpha_i(n))_{n \geq 1}$. Nous savons alors que

$$\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(n)}(x_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_\infty(x_i).$$

- (c) ► Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Comme $k \leq \varphi_{k+1}(k)$ et qu'une composée d'extractrices -donc de fonctions croissantes- est croissante,

$$\psi(k) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k(k) \leq \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k[\varphi_{k+1}(k)] = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k \circ \varphi_{k+1}(k).$$

Enfin, la fonction $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k \circ \varphi_{k+1}$ étant strictement croissante,

$$\psi(k) < \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_k \circ \varphi_{k+1}(k+1) = \psi(k+1),$$

i.e ψ est strictement croissante.

- Soit $i \in \mathbf{N}^*$ et $\epsilon > 0$. Par définition de $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_i(k)}(x_i) = \mu_\infty(x_i)$, il existe un entier N tel que pour tout entier $k \geq N$, $|\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_i(k)}(x_i) - \mu_\infty(x_i)| \leq \epsilon$. Soit alors $k \geq \max\{N, i+1\}$. Puisque $\varphi_{i+1} \circ \varphi_{i+2} \circ \dots \circ \varphi_k$ est une extractrice, $\tilde{k} := \varphi_{i+1} \circ \varphi_{i+2} \circ \dots \circ \varphi_k(k) \geq k \geq N$, et donc

$$|\mu_{\psi(k)}(x_i) - \mu_\infty(x_i)| = |\mu_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_i(\tilde{k})}(x_i) - \mu_\infty(x_i)| \leq \epsilon$$

Ceci prouve bien que la suite $(\mu_{\psi(k)}(x_i))_{k \geq 1}$ converge vers $\mu_\infty(x_i)$.

- (d) En tant que limite d'une suite positive, $\mu_\infty(x_i)$ est positif. De plus, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{i=1}^N \mu_n(x_i) \leq \mu_n(E) = 1$. En passant à la limite sur n , on obtient $\sum_{i=1}^N \mu_\infty(x_i) \leq 1$. Ainsi, la série de terme général positif $(\mu_\infty(x_i))_{i \geq 1}$ a une suite de sommes partielles bornées par 1. Ceci implique sa convergence et le fait que sa somme est majorée par 1.

- (e) Puisque F_ϵ est une partie finie de E , $\mu_\infty(F_\epsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(F_\epsilon)$, et donc $\mu_\infty(F_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$. Ainsi, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_\infty(x_i) \geq \sum_{x \in F_\epsilon} \mu_\infty(x) \geq 1 - \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. En faisant tendre ϵ vers 0^+ et en tenant compte de la question 12d, on obtient $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_\infty(x_i) = 1$. Avec le fait que $\mu_\infty(x_i) \geq 0$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, on a toutes les propriétés qui garantissent que μ_∞ appartient à $\mathcal{M}(E)$.
- Comme $\mu_{\psi(k)}(x_i) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu_\infty(x_i)$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$ d'après la question 12c, la question 10c nous garantit que la suite $(\mu_{\psi(k)})_{k \geq 1}$ converge vers μ_∞ dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$.
- Or, ψ est une extractrice (toujours d'après la question 12c), donc μ_∞ est une valeur d'adhérence de la suite $(\mu_k)_{k \geq 1}$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(E), \mathbf{R})$.

TROISIÈME PARTIE

13/ C'est du cours.

14/ ► On sait que $\mu_X(A) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X \in A})$. Ainsi, d'après la linéarité de l'espérance et l'inégalité triangulaire,

$$|\mu_X(A) - \mu_Y(A)| = |\mathbf{E}(\mathbf{1}_{X \in A}) - \mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y \in A})| = |\mathbf{E}(\mathbf{1}_{X \in A} - \mathbf{1}_{Y \in A})| \leq \mathbf{E}|\mathbf{1}_{X \in A} - \mathbf{1}_{Y \in A}|.$$

► Soit $\omega \in \Omega$.

- Si $X(\omega) \neq Y(\omega)$, $\mathbf{1}_{X \neq Y}(\omega) = 1$ est supérieur ou égal à $|\mathbf{1}_{X \in A}(\omega) - \mathbf{1}_{Y \in A}(\omega)|$ puisque cette dernière quantité appartient à $[0, 1]$ en tant que distance entre deux réels appartenant à $[0, 1]$.
- Si $X(\omega) = Y(\omega)$, $\mathbf{1}_{X \neq Y}(\omega) = 0$ et $|\mathbf{1}_{X \in A}(\omega) - \mathbf{1}_{Y \in A}(\omega)|$ est aussi nul (car $X(\omega) \in A$ si et seulement si $Y(\omega) \in A$).

On a donc démontré que $\mathbf{1}_{X \neq Y} \geq |\mathbf{1}_{X \in A} - \mathbf{1}_{Y \in A}|$. Par croissasnce de l'espérance, on obtient donc

$$\mathbf{P}(X \neq Y) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X \neq Y}) \geq \mathbf{E}(|\mathbf{1}_{X \in A} - \mathbf{1}_{Y \in A}|) \geq |\mu_X(A) - \mu_Y(A)|,$$

et ce pour toute $A \in \mathcal{P}(E)$. En prenant la borne supérieure de ces inégalités sur toutes les valeurs de A , on obtient bien $\|\mu_X - \mu_Y\| \leq \mathbf{P}(X \neq Y)$.

- 15/ (a) La seule justification à donner est l'existence du maximum. Or on se trouve dans le cas où il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $X_{n_0}(\omega) \neq X(\omega)$, si bien que $\{n \in \mathbf{N} \mid X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$. De plus, l'hypothsée sur la suite de variables aléatoires implique que cet ensemble est majoré, et toute partie majorée non vide de $\mathbf{N}$ admet un maximum.
- (b) Si $X_n(\omega) \neq X(\omega)$, par définition de L , $L(\omega) \geq n$, donc $\{X_n \neq X\} \subset \{L \geq n\}$ et on conclut grâce à la croissance de la probabilité $\mathbf{P}$.
- (c) Les questions 14 et 15b nous permettent d'écrire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|\mu_{X_n} - \mu_X\| \leq \mathbf{P}(L \geq n)$, et il suffit de prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(L \geq n) = 0$. Or, la suite d'événements $(\{L \geq n\})_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante si bien que d'après le théorème de limite monotone probabiliste,

$$\mathbf{P}(L \geq n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} (L \geq n)\right) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0,$$

car L étant à valeurs dans $\mathbf{N}$, elle ne prend aucune valeur supérieure à tous les entiers naturels.

- 16/ ► Soit $y \in \mathbf{N}^*$, et $k \in \mathbf{N}^* = \max_{j \geq 1} \{p_j \text{ divise } y\}$ l'indice du plus grand nombre premier qui divise y . Alors, puisque $v_{p_i}(y) = 0$ pour tout $i \in \llbracket k+1, +\infty \llbracket$, on a pour tout $n \geq k$, $\psi_n(y) = \psi_k(y)$.
- En fixant maintenant $\omega \in \Omega$ et en posant $y = X(\omega)$, on voit donc que la suite $(\psi_n(X(\omega)))_{n \geq 1}$ stationne et converge vers $X(\omega)$. D'après le résultat de la question 15c, on obtient alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_{X_n} - \mu_X\| = 0$ où $X_n = \psi_n \circ X$. La question 10c permet alors de conclure que

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_n = x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbf{P}(X = x).$$

17/ (a) Procédons par double inclusion. Pour cela notons

$$A = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbf{N}^* r p_i \text{ et } B = \left(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right) \cup \left(\mathbf{N}^* r p_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i \right).$$

- $\boxed{\subset}$ Soit $x \in A$. S'il appartient à $\bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i$, il appartient évidemment à B . Sinon, il est divisible par $r p_{n+1}$ sans l'être par aucun des $r p_{n+1} p_i$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (sans quoi il serait divisible par un $r p_i$). Donc x appartient aussi à B dans ce cas.
- $\boxed{\supset}$ Ce sens est trivial.

(b) Montrons donc par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ le prédicat

$$\mathcal{P}(n) : \left(\forall r \in \mathbf{N}^*, \quad \mu_1 \left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right) = \mu_2 \left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right) \right)$$

- Pour $n = 1$, $\mu_1 \left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right) = \mu_1 (\mathbf{N}^* r \setminus \mathbf{N}^* 2r) = \mu_1 (\mathbf{N}^* r) - \mu_1 (\mathbf{N}^* 2r)$ car $\mathbf{N}^* 2r \subset \mathbf{N}^* r$. Mais notre hypothèse sur μ_1 et μ_2 donne alors $\mu_1 \left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right) = \mu_2 (\mathbf{N}^* r) - \mu_2 (\mathbf{N}^* 2r)$, quantité dont on montre avec les mêmes arguments qu'elle est égale à $\mu_2 \left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right)$.
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que $\mu_1 \left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right) = \mu_2 \left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right)$. Commençons par noter que les deux événements $\left(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right)$ et $\left(\mathbf{N}^* r p_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i \right)$ sont disjoints. En effet, si un entier est divisible par un $r p_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et qu'il est divisible par $r p_{n+1}$, alors du fait du lemme de Gauss et de l'égalité $p_i \wedge p_{n+1} = 1$, il est divisible par $r p_{n+1} p_i$. Cette remarque justifie la deuxième égalité :

$$\begin{aligned} \mu_1 \left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbf{N}^* r p_i \right) &= \mu_1 \left[\left(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right) \cup \left(\mathbf{N}^* r p_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i \right) \right] \text{ par 17a,} \\ &= \mu_1 \left(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right) + \mu_1 \left(\mathbf{N}^* r p_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i \right) \\ &= \mu_1 \left(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right) + \mu_1 (\mathbf{N}^* r p_{n+1}) - \mu_1 \left(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i \right), \end{aligned}$$

car $\bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i \subset \mathbf{N}^* r p_{n+1}$. On montre évidemment de même que

$$\mu_2 \left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbf{N}^* r p_i \right) = \mu_2 \left(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right) + \mu_1 (\mathbf{N}^* r p_{n+1}) - \mu_1 \left(\bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_{n+1} p_i \right)$$

et on conclut sans difficulté avec l'hypothèse de récurrence.

- (c) Soit $r \in \mathbf{N}^*$. Puisque la suite d'événements $\left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right)_{n \geq 1}$ est décroissante, d'après le théorème de la limite monotone,

$$\mu_1 \left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_1 \left[\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right) \right] = \mu_1(r).$$

La dernière égalité provient du fait que si $x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \left(\mathbf{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbf{N}^* r p_i \right)$, il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $x = kr$.

Mais comme x n'appartient à aucun $\mathbf{N}^* r p_i$ pour $i \in \mathbf{N}^*$, k n'est divisible par aucun nombre premier. Or, seul $k = 1$ vérifie cette propriété.

En faisant le même sort à μ_2 , on obtient $\mu_1(r) = \mu_2(r)$ pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, soit $\mu_1 = \mu_2$.

- 18/** Raisonnons par l'absurde en supposant que la suite $(\mu_{X_n})_{n \geq 1}$ ne tend pas vers μ_X dans $\mathcal{B}(\mathcal{P}(\mathbf{N}^*), \mathbf{R})$. Alors,

- ▶ il existe un réel $\epsilon > 0$ et une extractrice φ tels que $\|\mu_{X_{\varphi(n)}} - \mu_X\| \geq \epsilon$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Nous noterons $Y_n := X_{\varphi(n)}$. Evidemment, la suite $(\mu_{Y_n})_{n \geq 1}$ est tendue et pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(r | Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(r | X)$.
- ▶ D'après la question 12e, il existe une extractrice ψ et une mesure μ_∞ telles que $\|\mu_{Y_{\psi(n)}} - \mu_\infty\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En particulier, par définition de cette norme, pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, $\mu_{Y_{\psi(n)}}(\mathbf{N}^* r) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_\infty(\mathbf{N}^* r)$.
- ▶ $\mu_{Y_{\psi(n)}}(\mathbf{N}^* r) = \mathbf{P}(Y_{\psi(n)} \in r\mathbf{N}^*) = \mathbf{P}(r | Y_{\psi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(r | X) = \mu_X(\mathbf{N}^* r)$.
- ▶ Des deux précédents items, on déduit que pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, $\mu_X(\mathbf{N}^* r) = \mu_\infty(\mathbf{N}^* r)$, ce qui conduit à l'égalité des deux mesures μ_X et μ_∞ d'après la question 17.
- ▶ Ainsi, nous avons à la fois $\|\mu_{Y_{\psi(n)}} - \mu_X\| \geq \epsilon$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $\|\mu_{Y_{\psi(n)}} - \mu_X\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, c'est-à-dire notre absurdité.

- 19/** ▶ Par définition de la loi uniforme, $\mathbf{P}(r | X_n^{(i)}) = \frac{1}{n} \text{Card}\{r\mathbf{N}^* \cap [1, n]\} = \frac{\lfloor n/r \rfloor}{n}$, qui est bien inférieur à n^{-1} car pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor \leq x$.
- ▶ puisque r divise $Z_n^{(s)}$ si et seulement si r divise tous les $X_n^{(i)}$,

$$\mathbf{P}(r | Z_n^{(s)}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^s (r | X_n^{(i)})\right) = \prod_{i=1}^s \mathbf{P}(r | X_n^{(i)}) = \left[\frac{\lfloor n/r \rfloor}{n} \right]^s \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r^{-s}.$$

20/ (a) $\mathbf{P}(k | Z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = ik) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s) i^s k^s} = k^{-s}.$

- (b) Puisque nous venons de montrer que la suite $(Z_n^{(s)})_{n \geq 1}$ vérifiait pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, $\mu_{Z_n^{(s)}}(r\mathbf{N}^*) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_s(r\mathbf{N}^*)$, il suffit d'après la question 18 de prouver que la suite $(\mu_{Z_n^{(s)}})_{n \geq 1}$ est tendue.

Pour cela fixons $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\sum_{r=N}^{+\infty} \frac{1}{r^s} \leq \epsilon$. Si Z_n est supérieur ou égal à N , il existe un entier $r \geq N$ qui divise tous les $X_n^{(i)}$, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n \geq N) &\leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{r \geq N} \left[\bigcap_{i=1}^s (r | X_n^{(i)}) \right]\right) \leq \sum_{r=N}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\bigcap_{i=1}^s (r | X_n^{(i)}) \right]\right) \\ &\leq \sum_{r=N}^{+\infty} \prod_{i=1}^s \mathbf{P}(r | X_n^{(i)}) \leq \sum_{r=N}^{+\infty} \frac{1}{r^s} \leq \epsilon, \end{aligned}$$

l'avant-dernière inégalité provenant de la question 19. Ainsi, en posant $F_\epsilon = [1, N-1]$, on a bien $\mathbf{P}(Z_n^{(s)} \in F_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

21/ $P_n(s)$ est égal à $\mathbf{P}(Z_n^{(s)} = 1)$. Comme $\left(\mu_{Z_n^{(s)}}\right)_{n \geq 1}$ tend vers μ_s d'après la question 20b, d'après la question 9, $\mathbf{P}_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_s(1)$ qui est bien égal à $\zeta(s)^{-1}$ d'après la question 20a. Finalement, d'après la question 7c,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(2) = \frac{6}{\pi^2} \simeq 0,607, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(4) = \frac{90}{\pi^4} \simeq 0,924, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(6) = \frac{945}{\pi^6} \simeq 0,983.$$

FIN