On appelle fonction cotangente, la fonction

$$\operatorname{cotan} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \end{array}$$

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose $\zeta(k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-k}$.

Les parties I et II sont indépendantes.

Première partie

Soient les fonctions f, g et D définies sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par :

$$f(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}, \quad g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right).$$

On pose $D = f - g$.

1a. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, justifier que la série définissant $g(x)$ est convergente.

1b. Montrer que les fonctions g et D sont impaires.

1c. Montrer que les fonctions g et D sont périodiques de période 1.

1d. Montrer que les fonctions g et D sont continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2f(x).$$

2b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2g(x).$$

3a. Montrer que la fonction D se prolonge par continuité en une fonction $\widetilde{D}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\widetilde{D}(0) = 0$.

3b. Justifier l'existence de $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\widetilde{D}(\alpha) = M$, où $M = \sup\limits_{t \in [0,1]} \widetilde{D}(t)$, puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \widetilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M.$$

4. En déduire que la fonction $\widetilde{D}$ est nulle sur $\mathbb{R}$, puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \pi x \operatorname{cotan}(\pi x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2}.$$

5a. Montrer que :

$$\forall x \in \left]-2\pi, 2\pi\right[\setminus \{0\}, \quad \frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} x^{2k}.$$

5b. En déduire :

$$\forall x \in \left]-2\pi, 2\pi\right[\setminus \{0\}, \quad \frac{ix}{e^{ix}-1} = 1 - \frac{ix}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \cdot x^{2k}.$$

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

6. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2\pi$, on a

$$z = (e^z - 1)\left(1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}} z^{2k}\right).$$

7a. Montrer que la fonction h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$h^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}}\zeta(2n).$$

7b. On définit une suite de nombres réels $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; b_{2n+1} = 0 \text{ et } b_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}(2n)!\zeta(2n)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

7c. Calculer b_2, b_4 et b_6 puis $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

Deuxième partie

Soit $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ un ensemble infini dénombrable où les x_i sont des éléments deux à deux distincts. On note $\mathscr{M}(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E. Si $\mu \in \mathscr{M}(E)$, on note $\mu(x)$ pour $\mu(\{x\})$.
On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Soit $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions *bornées* de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathbb{R}$. Si $f \in \mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$, on pose

$$||f|| = \sup\{|f(A)|, \quad A \in \mathscr{P}(E)\}.$$

8a. Montrer que $\mathscr{M}(E)$ est une partie de $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$.

8b. Montrer que $||\cdot||$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$.

9. Soient $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{M}(E)$ et soit μ un élément de $\mathscr{M}(E)$. Montrer que si la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ dans l'espace vectoriel normé $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$, alors

$$\forall x \in E, \quad \lim_{n\to+\infty} \mu_n(x) = \mu(x). \tag{1}$$

On se propose réciproquement de montrer qu'une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}(E)$ vérifiant la condition (1) pour un élément $\mu \in \mathscr{M}(E)$ converge vers μ dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$. On fixe donc une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}(E)$ et $\mu \in \mathscr{M}(E)$ vérifiant la condition (1). On fixe également un réel $\varepsilon > 0$.

10a. Montrer qu'il existe une partie finie F_ε de E et un entier $N_\varepsilon \geqslant 0$ tels que $\mu(F_\varepsilon) > 1-\varepsilon$ et pour tout entier $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\sum_{x\in F_\varepsilon} |\mu_n(x) - \mu(x)| < \varepsilon.$$

10b. Montrer que pour toute partie A de E :

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| \leqslant |\mu_n(A \cap F_\varepsilon) - \mu(A \cap F_\varepsilon)| + \mu(E \setminus F_\varepsilon) + \mu_n(E \setminus F_\varepsilon)$$

et en déduire que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|\mu_n(A) - \mu(A)| < 4\varepsilon$.

10c. En déduire que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$ si et seulement si elle vérifie la condition (1).

11. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on note δ_k la mesure de probabilité sur E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\delta_k(\{x_n\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$?

Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{M}(E)$.

12a. Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant k$, la suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_k(n)}(x_i)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

12b. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \geqslant i$, la limite de la suite $\left(\mu_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\ldots\circ\varphi_k(n)}(x_i)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne dépend que de i et pas de k. On note cette limite $\mu_\infty(x_i)$.

12c. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ & k & \longmapsto & \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_k(k) \end{array}$$

est strictement croissante, et que, pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\mu_{\psi(k)}(x_i))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\mu_\infty(x_i)$.

12d. Montrer que $\mu_\infty(x_i) \geqslant 0$ pour tout i de $\mathbb{N}^*$, et que $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_\infty(x_i) \leqslant 1$.

On dit que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}(E)$ est *tendue* si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie F_ε de E telle que $\mu_n(F_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$ pour tout entier naturel n.

12e. On supose de plus que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue. Montrer alors que μ_∞ définit un élément de $\mathscr{M}(E)$ qui est une valeur d'adhérence de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(E), \mathbb{R})$.

Troisième partie

Soit E une partie infinie dénombrable de $\mathbb{R}$. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires apparaissant dans la suite de ce problème. On admet que toutes les variables aléatoires introduites peuvent être construites sur cet espace. On note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans E. On appelle loi de la variable X et on note μ_X l'application

$$\begin{array}{rccc} \mu_X : & \mathscr{P}(E) & \to & [0;1] \\ & A & \mapsto & P(\{X \in A\}) \end{array}$$

où $\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \in A\}$.

13. Vérifier que μ_X est une probabilité sur E.

14. Montrer que pour toutes variables aléatoires X et Y sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et pour toute partie A de E :

$$|\mu_X(A) - \mu_Y(A)| \leqslant \mathbb{E}\left(|\mathbb{1}_{\{X\in A\}} - \mathbb{1}_{\{Y\in A\}}|\right)$$

et en déduire que $||\mu_X - \mu_Y|| \leqslant P(X \neq Y)$, où $\{X \neq Y\} = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \neq Y(\omega)\}$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et à valeurs dans E. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et converge vers $X(\omega)$. On définit aussi la variable aléatoire :

$$\begin{array}{rccl} L : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & \omega & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n(\omega) = X(\omega) \\ \max\{n \in \mathbb{N},\ X_n(\omega) \neq X(\omega)\} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

15a. Justifier que l'application L est bien définie.

15b. Montrer que $P(X_n \neq X) \leqslant P(L \geqslant n)$ pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

15c. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||\mu_{X_n} - \mu_X|| = 0$.

Si $N \in \mathbb{N}^*$ et p est un nombre premier, on note $\nu_p(N)$ la valuation p-adique de N. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi_n : & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ & x & \longmapsto & \prod_{i=1}^{n} p_i^{\nu_{p_i}(x)} \end{array}$$

où $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des nombres premiers, classés par ordre croissant.

16. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = x) = \lim_{n \to +\infty} P(\psi_n(X) = x)$$

Quatrième partie

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si $N \in \mathbb{N}^*$, on note $P(N|X)$ la probabilité de l'évènement « N divise X ». Si $r \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{N}^* r$ l'ensemble des multiples strictement positifs de r.

17. Soient μ_1 et μ_2 deux probabilités sur $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mu_1(\mathbb{N}^* r) = \mu_2(\mathbb{N}^* r)$. On veut montrer que $\mu_1 = \mu_2$.

17a. On rappelle que l'on note $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers, classés par ordre croissant. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \geqslant 1$:

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathbb{N}^* r p_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i \right) \cup \left(\mathbb{N}^* r p_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_{n+1} p_i \right).$$

17b. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mu_1 \left(\mathbb{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i \right) = \mu_2 \left(\mathbb{N}^* r \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{N}^* r p_i \right).$$

17c. Conclure.

18. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que :

i. La suite $(\mu_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue (on rappelle que le qualiticatif *tendue* a été défini en **12e**).
ii. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(r|X_n) = P(r|X)$.

Montrer qu'alors, la suite $(\mu_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers μ_X dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{R})$.

Soit $s \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \ldots, X_n^{(s)}$ s variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.
On note $Z_n^{(s)} = X_n^{(1)} \wedge \ldots \wedge X_n^{(s)}$ le pgcd de $X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(s)}$.

19. Pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, calculer $P(r|X_n^{(i)})$ et montrer que $P(r|X_n^{(i)}) \leqslant \frac{1}{r}$. En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} P(r|Z_n^{(s)}) = \frac{1}{r^s}.$$

Pour $s > 1$ fixé, on définit une loi de probabilité μ_s sur $\mathbb{N}^*$ en posant, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}.$$

20a. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit la loi μ_s. Calculer $P(k|Z)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

20b. Soit $s \geqslant 2$ un entier. En déduire que la suite $(\mu_{Z_n^{(s)}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{B}(\mathscr{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{R})$ vers μ_s.

21. Soit $s, n \in \mathbb{N}^*$ avec $2 \leqslant s \leqslant n$. On tire au hasard s nombres dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ et on note $P_n(s)$ la probabilité que ces nombres soient premiers entre eux. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(s) = \frac{1}{\zeta(s)},$$

et donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} P_n(s)$ dans le cas où $s = 2$, puis $s = 4$, et enfin $s = 6$.