

## Problème 1 - Une marche aléatoire

### Présentation générale

On considère deux entiers  $M \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $A \in \mathbb{N}^*$ . Une particule hypothétique a différents niveaux d'énergie numérotés par des entiers naturels, qu'on mesure à intervalles réguliers. On suppose qu'à l'origine, elle est au niveau zéro et qu'après chaque mesure, son niveau d'énergie a augmenté d'un entier aléatoire entre 0 et  $M - 1$ .

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au temps nécessaire (proportionnel au nombre de mesures) pour que la particule atteigne ou dépasse le niveau d'énergie  $A$ .

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et on considère une suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi uniforme sur  $\llbracket 0, M - 1 \rrbracket$ . On considère également la suite de variables aléatoires réelles  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $S_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

On considère la variable aléatoire  $T$  définie de la façon suivante :

- 1) si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $S_n < A$ , alors on pose  $T = +\infty$ ;
- 2) sinon, on pose  $T = \min \{n \in \mathbb{N}^* / S_n \geq A\}$ .

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire  $T$  dans deux cas particuliers.

## I. Préliminaires

### I.A - Modélisation et premier résultat

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

**Q 1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Que représentent les variables aléatoires  $X_n$  et  $S_n$  dans le contexte de la situation présentée? Que représente la variable aléatoire  $T$ ?

Exprimer l'événement  $\{T = +\infty\}$  à l'aide des événements  $\{S_n < A\}$ .

**Q 2.** Que peut-on dire à propos de la monotonie de la suite  $(S_n)$ ? Montrer que si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n < A$ , alors à partir d'un certain rang, tous les  $X_n$  sont nuls.

**Q 3.** Justifier que  $\{T = +\infty\} \subset \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} \{X_n = 0\}$ .

**Q 4.** Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P} \left( \bigcap_{n \geq p} \{X_n = 0\} \right) = 0$ . En déduire la valeur de  $\mathbb{P}(T = +\infty)$ .

### I.B - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

**Q 5.** Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]-1, 1[$  et calculer  $f^{(p)}(x)$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $x \in ]-1, 1[$

**Q 6.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$  est égal à 1.

**Q 7.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

## II. Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que  $M = 2$ .

## II.A - Loi des variables aléatoires $S_n$ et $T$

Q 8. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que  $S_n$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $1/2$ .

Q 9. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire  $T$  ?

Q 10. Soit  $k \in \mathbb{N}$  avec  $k \geq A$ . Exprimer l'évènement  $(T = k)$  en fonction des évènements  $(S_{k-1} = A - 1)$  et  $(X_k = 1)$ .  
En déduire que :

$$\mathbb{P}(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$$

## II.B - Espérance de la variable aléatoire $T$

On note la fonction génératrice  $G_T$  de la variable aléatoire  $T$ .

Q 11. Déterminer le rayon de convergence  $R_T$  de la série entière  $\sum_{k \geq A} \mathbb{P}(T = k)x^k$  et montrer que :

$$\forall x \in ]-R_T, R_T[ \quad G_T(x) = \left( \frac{x}{2-x} \right)^A.$$

Q 12. En déduire le temps moyen nécessaire pour atteindre ou dépasser le niveau d'énergie  $A$ .

## III. Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que  $A \leq M$ .

### III.A - Calcul de la probabilité $\mathbb{P}(S_n \leq k)$

Q 13. Montrer la formule suivante par récurrence sur  $k$  :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \sum_{\ell=0}^k \binom{n+\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}.$$

Q 14. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, A-1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S_{n+1} \leq k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^k \mathbb{P}(S_n \leq k - \ell).$$

Q 15. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, A-1 \rrbracket \quad \mathbb{P}(S_n \leq k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}$$

### III.B - Espérance de la variable aléatoire $T$

Q 16. Soit  $Z$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(Z > n)$  converge. Montrer que  $Z$  admet une espérance finie et justifier l'égalité :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > n)$$

*Indication : on pourra appliquer le th. de Fubini sur la famille de réels  $(\mathbb{P}(Z = k))_{0 \leq n < k}$  en le justifiant.*

Q 17. Que peut-on dire des évènements  $(T > n)$  et  $(S_n < A)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ? En déduire que la variable aléatoire  $T$  admet une espérance finie et calculer sa valeur.

## Problème 2 - Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \quad (E)$$

### I. Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \quad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que la série entière  $\sum a_n x^n$  ait un rayon de convergence  $r > 0$ . On définit la fonction  $f : ]-r, r[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in ]-r, r[ \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

**Q 1.** Justifier que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que les fonctions  $f'$  et  $f''$  sont développables en série entière. Exprimer avec la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les développements en série entière respectifs des fonctions  $f'$  et  $f''$  en précisant leur rayon de convergence.

**Q 2.** Montrer qu'il existe une suite  $(b_n)_{n \geq 2}$  de nombres réels non nuls telle que pour tout  $x \in ]-r, r[$ , on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

**Q 3.** Montrer que  $f$  est solution de (H) sur l'intervalle  $]-r, r[$  si et seulement si  $a_0 = 0$  et  $a_{n+1} = a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Q 4.** En déduire que si  $f$  est solution de (H) sur  $]-r, r[$ , alors  $r \geq 1$  et il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

**Q 5.** Réciproquement, montrer que si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors la fonction

$$g : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$$

est une solution de (H) sur  $]-1, 1[$  développable en série entière.

### II. Solution de (E) sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

On désigne par  $I$  l'un des intervalles  $]0, 1[$  ou  $]1, +\infty[$ . Soit  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On définit la fonction  $z : I \rightarrow \mathbb{R}$  par la relation :

$$\forall x \in I \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

**Q 6.** Justifier que  $z$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle  $I$ , puis exprimer  $z'$  et  $z''$  avec  $y$ ,  $y'$  et  $y''$ .

**Q 7.** Montrer que  $y$  est solution de (E) sur  $I$  si et seulement si  $z$  est solution sur  $I$  de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x. \quad (E_1)$$

**Q 8.** Montrer que si  $z$  est solution de (E<sub>1</sub>) sur  $I$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in I \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

**Q 9.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur  $I$ .

### III. Solution de (E) sur $]0, +\infty[$

**Q 10.** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur  $]0, +\infty[$ .

## Problème 1

### I.

#### I.A -

**Q 1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $X_n$  représente l'accroissement du niveau d'énergie entre l'état mesuré à l'étape  $n - 1$  et celui à l'étape  $n$ .  $S_n$  représente le niveau d'énergie après la  $n$ -ème mesure. Et  $T$  représente "le temps d'attente" pour dépasser le niveau d'énergie  $A$ , c'est à dire le premier (le plus petit)  $n$  tel que  $S_n \geq A$ .

Par définition,  $T = +\infty$  si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n < A$ , donc  $\{T = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{S_n < A\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{S_n < A\}$  (car  $\{S_0 < A\} = \Omega$ ).

**Q 2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n - S_{n-1} = X_n \geq 0$  donc la suite  $(S_n)$  est croissante. Donc si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n < A$ , la suite  $(S_n)$  est donc croissante et majorée, donc elle converge. Or c'est aussi une suite à valeurs entières, donc elle est stationnaire : à partir d'un certain rang,  $S_n = S_{n-1}$ , i.e.  $X_n = 0$ .

**Q 3.** On note  $U$  l'événement « à partir d'un certain rang, les  $X_n$  sont nuls » :

$$\omega \in U \iff (\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq p \quad X_n(\omega) = 0)$$

donc

$$U = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} \{X_n = 0\}$$

D'après l'implication de la question précédente, on en déduit l'inclusion  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{S_n < A\} \subset U$  donc d'après la question

**Q 1,**  $\{T = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{S_n < A\} \subset \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} \{X_n = 0\}$ .

**Q 4.** Soit  $p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $q > p$ . Les variables aléatoires  $X_p, \dots, X_q$  sont indépendantes

donc  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=p}^q \{X_n = 0\}\right) = \prod_{n=p}^q \mathbb{P}(X_n = 0) = \prod_{n=p}^q \frac{1}{M} = \frac{1}{M^{q-p+1}}$ .

Or par continuité décroissante,  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq p} \{X_n = 0\}\right) = \lim_{q \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=p}^q \{X_n = 0\}\right)$

donc  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq p} \{X_n = 0\}\right) = \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{1}{M^{q-p+1}} = 0$ .

De plus, par sous-additivité,  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} \{X_n = 0\}\right) \leq \sum_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq p} \{X_n = 0\}\right) = \sum_{p \in \mathbb{N}} 0 = 0$

donc  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} \{X_n = 0\}\right) \leq 0$ , i.e.  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} \{X_n = 0\}\right) = 0$ .

D'après l'inclusion précédente,  $\mathbb{P}(T = +\infty) \leq 0$  donc  $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$ .

#### I.B -

**Q 5.** On pose le prédicat  $\mathcal{P}(p)$  : «  $f^{(p)}$  existe sur  $] - 1, 1[$  et que  $\forall x \in ] - 1, 1[$ ,  $f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$  ».

Pour  $p = 0$ , c'est la définition de  $f$  :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

Soit  $p \in \mathbb{N}$  quelconque, supposons  $\mathcal{P}(p)$  vraie.

On a alors  $f^{(p)}$  qui est dérivable sur  $] - 1, 1[$  comme fonction rationnelle à dénominateur non nul, ainsi  $f^{(p+1)}(x) = (f^{(p)})'(x) = \frac{d}{dx} p!(1-x)^{-(p+1)} = p!(-1)(-(p+1))(1-x)^{-(p+2)} = \frac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}$ . Donc  $\mathcal{P}(p+1)$  est vraie.

Conclusion : par principe de récurrence, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(p)$  est vraie.

**Q 6.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Posons pour tout  $n \geq p$ ,  $a_n = \binom{n}{p} > 0$ .

Les coefficients étant strictement positifs, nous pouvons appliquer la règle de D'Alembert sans la variable  $x$  pour déterminer  $R$  le rayon de convergence : par expression en factorielles des combinaisons et simplification,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+1-p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +1. \text{ Ainsi } R = \frac{1}{1} = +1.$$

Conclusion : le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$  est égal à 1.

**Q 7.** D'abord par DSE usuel,  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$  et  $\forall x \in ] -1, 1[ \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ .

Ensuite soit  $p \in \mathbb{N}$ . Par théorème de dérivation des séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence, on peut dériver  $f$   $p$  fois terme à terme sur l'ouvert de convergence, ce qui donne

$$\forall x \in ] -1, 1[ \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}$$

Enfin nous avons l'expression de  $f^{(p)}$  obtenue précédemment. Il suffit alors de multiplier par  $x^p$  et diviser par  $p!$  pour obtenir :

$$\forall x \in ] -1, 1[ \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

## II.

### II.A -

**Q 8.** Remarquons que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_k \sim \mathcal{B}(1/2)$ ,  $S_n$  apparait donc comme somme de  $n$  v.a.d. indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(1/2)$ .

Ainsi, si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $1/2$ .

**Q 9.** À chaque étape, la suite  $(S_n)$  croît d'au plus 1, donc pour dépasser  $A$ , il faut au moins  $A$  accroissements, donc  $T \geq A$ .

Ainsi  $T(\Omega) = \llbracket A, +\infty \rrbracket$ .

**Q 10.** Soit  $k \in \mathbb{N}$  avec  $k \geq A$ . Vu qu'ici on ne peut croître que d'une unité ou rester inchangé à chaque étape,

$$(T = k) = (S_{k-1} = A - 1) \cup (X_k = 1).$$

Ensuite les événements  $(S_{k-1} = A - 1)$  et  $(X_k = 1)$  sont indépendants (par le lemme des coalitions), donc  $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(S_{k-1} = A - 1)\mathbb{P}(X_k = 1)$ .

Or  $S_{k-1} \sim \mathcal{B}(k-1, 1/2)$  donc  $\mathbb{P}(S_{k-1} = A - 1) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^{k-1}}$  et  $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}$  donc  $\mathbb{P}(T = k) = \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{A-1}$ .

### II.B -

**Q 11.** D'après la question **Q 4**,  $T$  est presque sûrement à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Donc par définition,  $G_T(x) = \sum_{k=A}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k) x^k$  pour  $x$  proche de 0 (pour  $x \in [-1, 1]$  à coup sûr et on peut se contenter de  $x \in [0, 1]$ ). On note  $R$  son rayon de convergence.

$$\text{Donc pour } x \in ] -R, R[, \quad G_T(x) = \sum_{k=A}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{A-1} x^k = \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \left(\frac{x}{2}\right)^k$$

D'après **Q 6**, cette série entière a donc pour rayon de convergence 2 et d'après **Q 7**,

$$G_T(x) = \frac{x}{2} \sum_{k=A}^{+\infty} \binom{k-1}{A-1} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} = \frac{x}{2} \sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} \left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{x}{2} \times \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{A-1}}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^A} = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A$$

**Q 12.** Le nombre moyen d'étapes pour atteindre ou dépasser le niveau d'énergie  $A$  est donné par  $\mathbb{E}(T)$ . Comme  $R_T = 2 > 1$ ,  $G_T$  est dérivable en 1, et donc d'après le cours,  $\mathbb{E}(T) = G'_T(1)$ .

Or pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $G'_T(x) = A \left( \frac{x}{2-x} \right)^{A-1} \frac{2}{(2-x)^2}$ , ainsi  $\mathbb{E}(T) = 2A$ .

### III.

#### III.A -

**Q 13.** On pose  $\mathcal{P}(k)$  le prédicat «  $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{\ell=0}^k \binom{n+\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}$  ».

Pour  $k = 0$ ,  $\sum_{\ell=0}^k \binom{n+\ell}{n} = \binom{n}{n} = 1$  et  $\binom{n+1+k}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1$  donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

Si  $\mathcal{P}(k)$  est vraie, alors

$\sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{n+\ell}{n} = \sum_{\ell=0}^k \binom{n+\ell}{n} + \binom{n+k+1}{n} = \binom{n+1+k}{n+1} + \binom{n+1+k}{n}$  et on reconnaît la formule du triangle

de Pascal, donc  $\sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{n+\ell}{n} = \binom{n+2+k}{n+1}$  :  $\mathcal{P}(k+1)$  est vraie.

Selon le principe de récurrence, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(k)$  est vraie.

**Q 14.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'évènements  $((X_{n+1} = 0), \dots, (X_{n+1} = M-1))$  :

pour  $k \leq A-1$ ,  $\mathbb{P}(S_{n+1} \leq k) = \sum_{\ell=0}^{M-1} \mathbb{P}(S_{n+1} \leq k, X_{n+1} = \ell)$ .

Or si  $\ell > k$ , comme  $S_{n+1} \geq X_{n+1}$ , il est impossible d'avoir en même temps  $S_{n+1} \leq k$  et  $X_{n+1} = \ell > k$ , donc  $\mathbb{P}(S_{n+1} \leq k, X_{n+1} = \ell) = 0$ .

Donc  $\mathbb{P}(S_{n+1} \leq k) = \sum_{\ell=0}^k \mathbb{P}(S_{n+1} \leq k, X_{n+1} = \ell)$ .

Or pour  $\ell \leq k$ ,  $(S_{n+1} \leq k, X_{n+1} = \ell) = (S_n \leq k - \ell, X_{n+1} = \ell)$  qui nous ramène à deux évènements indépendants (par le lemme des coalitions)

donc  $\mathbb{P}(S_{n+1} \leq k) = \sum_{\ell=0}^k \mathbb{P}(S_n \leq k - \ell) \mathbb{P}(X_{n+1} = \ell) = \sum_{\ell=0}^k \mathbb{P}(S_n \leq k - \ell) \frac{1}{M}$ .

**Q 15.** On pose  $\mathcal{P}(n)$  le prédicat : «  $\forall k \in \llbracket 0, A-1 \rrbracket \quad \mathbb{P}(S_n \leq k) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}$  ».

Pour  $n = 1$ ,  $S_1 = X_1$  et  $X_1$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 0, M-1 \rrbracket$ , donc  $\mathbb{P}(X_1 \leq k) = \frac{k+1}{M} = \binom{k+1}{1} \frac{1}{M}$  :  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

Si  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, alors d'après **Q 14** et l'hypothèse de récurrence, pour tout  $k \in \llbracket 0, A-1 \rrbracket$ ,

$\mathbb{P}(S_{n+1} \leq k) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^k \mathbb{P}(S_n \leq k - \ell) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{M^n} \binom{n+k-\ell}{n} = \frac{1}{M^{n+1}} \sum_{\ell=0}^k \binom{n+k-\ell}{n}$

donc  $\mathbb{P}(S_{n+1} \leq k) = \frac{1}{M^{n+1}} \sum_{j=0}^k \binom{n+j}{n} = \frac{1}{M^{n+1}} \binom{n+k+1}{n+1}$  d'après **Q 13**, donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Selon le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

#### III.B -

**Q 16.** La famille de réels  $(\mathbb{P}(Z = k))_{0 \leq n < k}$  est une famille de réels positifs, donc tout est permis !

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{Z > n\} = \bigsqcup_{k > n} \{Z = k\}$  donc  $\mathbb{P}(Z > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k)$  donc d'après le th de Fubini,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) \right) = \sum_{0 \leq n < k} \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(Z = k) \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{E}(Z).$$

Remarque : cette égalité est valable aussi dans le cas de la divergence de la série, on a alors deux termes égaux à  $+\infty$ .

**Q 17.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(T > n) = (S_n < A) = (S_n \leq A - 1)$  : si au rang  $n$ , on n'a pas encore dépassé  $A$ , alors il faudra strictement plus de  $n$  étapes pour dépasser ou atteindre  $A$ , et réciproquement.

$$\text{D'après la question précédente, } \mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n \leq A - 1)$$

$$\text{et d'après Q 15, } \mathbb{P}(S_n \leq A - 1) = \frac{1}{M^n} \binom{n + A - 1}{n} = \frac{1}{M^n} \binom{n + A - 1}{A - 1} \text{ par symétrie des coefficients binomiaux!}$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n + A - 1}{A - 1} x^n \text{ en posant } x = \frac{1}{M},$$

$$\text{donc } \mathbb{E}(T) = \sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} x^{k-A+1} = \frac{1}{x^{A-1}} \sum_{k=A-1}^{+\infty} \binom{k}{A-1} x^k = \frac{1}{x^{A-1}} \times \frac{x^{A-1}}{(1-x)^A} \text{ d'après Q 7}$$

$$\text{donc } \mathbb{E}(T) = \frac{M^A}{(M-1)^A}.$$

## Problème 2

### I.

**Q 1.** C'est du cours!  $f$  est la somme d'une série entière de rayon  $r > 0$  donc  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -r; r[$  et on peut dériver terme à terme à tout ordre; en particulier, elle est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] -r; r[$  et, pour  $x \in ] -r; r[$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Par propriété des séries entières, ces deux séries sont aussi de rayon  $r$ .

**Q 2.** On a donc, pour  $x \in ] -r; r[$ ,

$$x^2 f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n \text{ donc } x^3 f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2) a_{n-1} x^n$$

$$x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \text{ donc } x^2 f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n$$

$$\text{et } f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - na_n - (n-1)a_{n-1} + a_n)x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n^2 - 2n + 1)a_n - (n^2 - 3n + 2 + n - 1)a_{n-1}) x^n \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) x^n \end{aligned}$$

Pour  $n = 1$ ,  $(n-1)^2 = 0$  donc, si on pose, pour  $n \geq 2$ ,  $b_n = (n-1)^2$ , on a

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (a_n - a_{n-1}) x^n$$

**Q 3.** La somme d'une série entière est nulle sur  $] -r; r[$  ( $r > 0$ ) si et seulement si tous ses coefficients sont nuls (unicité d'un développement en série entière) donc, d'après la question précédente,  $f$  est solution de  $(H)$  si et seulement si  $a_0 = 0$  et, pour tout  $n \geq 2$ ,  $b_n(a_n - a_{n-1}) = 0$ . Mais, pour  $n \geq 2$ ,  $b_n \neq 0$  donc  $a_n - a_{n-1} = 0$ .

En passant de  $n$  à  $n + 1$  on a finalement :  $f$  est solution de  $(H)$  sur  $] -r; r[$  si et seulement si  $a_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_{n+1} = a_n$ .

**Q 4.** On suppose que  $f$  est solution de  $(H)$  sur  $] -r; r[$ . Alors,  $a_0 = 1$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n = a_1$ .

La série géométrique  $\sum x^n$  est de rayon 1 donc  $r \geq 1$  ( $r = +\infty$  si  $a_1 = 0$ ) et, en posant  $\lambda = a_1$ , pour  $x \in ] -1; 1[$ ,

$$f(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x^n.$$

Il s'agit de la somme d'une série géométrique de raison  $x \in ] -1; 1[$  et de premier terme  $x$  donc, pour  $x \in ] -1; 1[$ ,

$$f(x) = \frac{\lambda x}{1 - x}$$

**Q 5.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $g$  la fonction  $x \mapsto \frac{\lambda x}{1 - x}$ .

Alors, d'après le calcul précédent, pour  $x \in ] -1; 1[$ ,  $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n$  :  $g$  est la somme d'une série entière de rayon

$1 > 0$ . De plus, pour  $x \in ] -1; 1[$ ,  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  avec  $a_0 = 0$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $a_n = \lambda$ ; par conséquent, pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_{n+1} = a_n$ .

On peut donc utiliser la question **Q 3** (qui est une équivalence) pour conclure que  $g$  est une solution de  $(H)$  sur  $] -1; 1[$ , développable en série entière.

## II.

**Q 6.** Par produit de fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ ,  $z$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  et, pour  $x \in I$ ,

$$z'(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y'(x) - \frac{1}{x^2} y(x) \text{ et } z''(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y''(x) - \frac{2}{x^2} y'(x) + \frac{2}{x^3} y(x).$$

**Q 7.**

$$\begin{aligned} xz''(x) + z'(x) &= (1 - x)y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + \frac{2}{x^2}y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x) \\ &= \frac{1}{x^2} (x^2(1 - x)y''(x) - x(1 + x)y'(x) + y(x)) \end{aligned}$$

donc  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $I$  si et seulement si  $z$  est solution sur  $I$  de l'équation

$$xz'' + z' = 2x$$

**Q 8.**  $z$  est solution de  $(E_1)$  sur  $I$  si et seulement si  $z'$  est solution sur  $I$  de l'équation

$$(E_2) : xZ' + Z = 2x.$$

L'équation homogène associée à  $(E_2)$  est  $(H_2) : xZ' + Z = 0$ , équivalente à  $Z' + \frac{1}{x}Z = 0$  ( $x$  ne s'annule pas sur  $I$ ).

$a : x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $I$ ; une primitive de  $a$  est  $x \mapsto \ln(x)$  donc les solutions de  $(H_2)$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire  $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$ .

$x \mapsto x$  est solution particulière de  $(E_2)$  donc les solutions de  $(E_2)$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \frac{\lambda}{x} + x$ .

Finalement,  $z$  est solution de  $(E_1)$  sur  $I$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \in I$ ,  $z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x$ .

**Q 9.** Ceci équivaut à l'existence de  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \in I$ ,  $z(x) = \lambda \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \mu$ .

De plus, pour  $x \in I$ ,  $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x} \neq 0$  donc  $y$  est solution de  $(E)$  sur  $I$  si et seulement si il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que, pour tout  $x \in I$ ,  $y(x) = \frac{x}{1 - x} \left( \lambda \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \mu \right)$ .

Les solutions de (E) sur  $I$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x} \ln(x) + \frac{\mu x}{1-x} + \frac{x^3}{2(1-x)}$$

lorsque  $(\lambda, \mu)$  décrit  $\mathbb{R}^2$ .

### III.

**Q 10.** Soit  $f$  une solution de (E) sur  $]0; +\infty[$ . Alors  $f$  est solution sur  $]0; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ . D'après la question précédente il existe des constantes réelles  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$  telles que

$$\forall x \in ]0; 1[, f(x) = \frac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} + \frac{2\mu_1 x + x^3}{2(1-x)}$$

$$\forall x \in ]1; +\infty[, f(x) = \frac{\lambda_2 x \ln(x)}{1-x} + \frac{2\mu_2 x + x^3}{2(1-x)}$$

$f$  doit être continue en 1 donc doit avoir une limite finie en 1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = -1$  (limite usuelle) donc on doit avoir  $2\mu_1 + 1 = 2\mu_2 + 1 = 0 : \mu_1 = \mu_2 = -\frac{1}{2}$ .

Pour  $x \in ]0; 1[, f(x) = \frac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} + \frac{-x + x^3}{2(1-x)} = \frac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} - \frac{x(1+x)}{2}$

Pour obtenir le nombre dérivée de  $f$  à gauche à 1, on cherche le  $DL_1(1)$  de  $f$  :

Pour  $h$  au voisinage de 0,  $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)$  donc

$$f(1+h) = -\lambda_1 \frac{(1+h)(h - h^2/2 + o(h^2))}{h} - \frac{(1+h)(2+h)}{2}$$

et, après simplification,

$$f(1+h) = -\lambda_1 - 1 - \left(-\frac{\lambda_1}{2} - \frac{3}{2}\right)h + o(h)$$

On en déduit que  $f'_g(1) = -\frac{\lambda_1}{2} - \frac{3}{2}$ .

De même,  $f'_d(1) = -\frac{\lambda_2}{2} - \frac{3}{2}$

$f$  est dérivable donc  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Par conséquent, pour  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $f(x) = \frac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} - \frac{x(1+x)}{2}$  et  $f(1) = -\lambda_1 - 1$ .

Pour la réciproque, il suffit que montrer qu'une telle fonction est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

$$f(1+h) = -\lambda_1(1+h) \frac{\ln(1+h)}{h} - \frac{(1+h)(2+h)}{2}$$

$h \mapsto \frac{\ln(1+h)}{h}$  est prolongeable en une fonction développable en série entière de rayon 1 donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

On peut alors conclure que les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}^{+*}$  sont les fonctions  $f$  définies par  $f(1) = -\lambda_1 - \frac{1}{2}$  et, pour  $x \neq 1$ ,  $f(x) = \frac{\lambda_1 x \ln(x)}{1-x} - \frac{x(1+x)}{2}$  avec  $\lambda_1$  réel quelconque.