Mpi - Programme de colles 20

Semaine du 23 au 27 mars 2026

1 Calcul différentiel

a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles. Absence de lien entre la continuité et l'existence de dérivées selon des vecteurs.
b) Fonctions différentiables en un point, différentielle en un point. Calcul de la différentielle grâce aux dérivées partielles, matrice jacobienne, gradient. Caractérisation des fonctions dont une dérivée partielle est constamment nulle.
c) Th. d'opérations sur les fonctions différentiables (comb. lin., composition par une app. lin., par une app. multilinéaire), th. de composition (règle de la chaîne). Exemples de résolutions d'équations aux dérivées partielles. Dérivation le long d'un chemin, lignes de niveau, lignes de champ.
d) Fonctions de classe C^1. Th. fondamental : équivalence entre classe C^1 et existence et continuité des dérivées partielles. Opérations sur les fonctions de classe C^1. Dans un ouvert connexe par arcs, caractérisation des fonctions C^1 constantes.
e) Vecteurs tangents à une partie. Cas particulier sur une partie d'équation $g(x_1, \ldots, x_p) = 0$ en un point où la différentielle de g est non nulle.
f) Optimisation au premier ordre : point critique, condition nécessaire d'existence d'un extrémum en un point d'un ouvert ; condition nécessaire d'existence d'un extrémum de f sur une partie d'équation $g(x_1, \ldots, x_p) = 0$ en un point où la différentielle de g est non nulle (optimisation sous une contrainte).
g) Fonctions de classe C^k ($k \geqslant 2$). Th. de Schwarz.
h) Optimisation au second ordre pour les fonctions C^2 : hessienne en un point, dév. limité à l'ordre 2, condition suffisante d'existence d'un extrémum en un point d'un ouvert.