Mpi - Programme de colles 16

Semaine du 23 au 27 février 2026

1 Espaces euclidiens

a) Représentation des formes linéaires d'un espace euclidien par un produit scalaire.

b) Adjoint d'un endomorphisme, définition, unicité, matrice dans une base orthonormée. Propriétés usuelles, dont stabilité par l'adjoint de l'orthogonal d'un s.e.v. stable.

c) Orientation d'un $\mathbb{R}$-e.v. (présentation succinte).

d) Isométries vectorielles ou automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien : définition (conservation de la norme), diverses caractérisations (conservation du produit scalaire, transformation d'une base orthonormée en base orthonormée, l'adjoint est l'inverse). Groupe orthogonal.

e) Matrices orthogonales, lien avec les isométries vectorielles. Déterminant d'une matrice orthogonale, groupe spécial orthogonal. Changements de bases orthonormées. Produit mixte en dimension quelconque, produit vectoriel en dimension 3.

f) Étude en dimension 2, détermination des isométries vectorielles.

g) Réduction des isométries vectorielles. Définition de matrices orthosemblables.

h) Étude en dimension 3. En fonction de la dimension du sous-espace des vecteurs invariants, nature des isométries vectorielles : réflexions, rotations (et antirotations : hors-programme). Détermination de l'axe orienté et de l'angle associé dans le cas d'une rotation. Caractérisation des rotations par le déterminant.

i) Endomorphismes auto-adjoints, lien avec les matrices symétriques. Stabilité du supplémentaire orthogonal d'un s.e.v. stable par un endomorphisme symétrique, orthogonalité deux à deux des sous-espaces propres. Matrices orthodiagonalisables, matrices orthosemblables. Théorème spectral. Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis-positifs, caractérisation par le spectre.

2 Probabilités

a) Dénombrabilité : présentation rapide.

b) Espace probabilisé : définition d'une tribu, d'une probabilité. Principales propriétés, en particulier continuité monotone d'une probabilité, majoration de probabilité d'une réunion dénombrable d'événements.
Distribution de probabilité discrète sur un univers, existence et unicité de la probabilité qui suit une distribution de probabilité discrète. Cas des univers finis ou dénombrables.

c) Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités composées, système complet ou quasi-complet d'événements, formule des probabilités totales, formule de Bayes.

d) Indépendance d'événements, lemme des coalitions sur les événements.