TD - Problème sur les limites et la continuité

L'objet du problème est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{array}{l} \exists c > 0 \quad f(c) \leqslant 1 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \qquad (*) \end{array}$$

Partie 1 - Recherche de solutions particulières

Question 1) Déterminez les solutions constantes du problème.

Question 2) Montrez que si f est une solution (pas forcément constante ! cette question est indépendante de la précédente) telle que $f(0) = 0$, alors f est l'application nulle.

Partie 2 - Recherche des solutions non constantes

Dans toute cette partie, on considère f une solution non constante au problème posé.

Question 1)

a) Montrez que $f(0) = 1$.

b) Montrez que f est paire.

Question 2)

a) Donnez une relation simple entre $f(x)$ et $f\left(\frac{x}{2}\right)^2$.

b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{c}{2^n}\right) \leqslant 1$.

Question 3)

a) Justifiez l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \delta]$, $f(x) \geqslant 0$.

b) Déduisez-en l'existence d'au moins un réel $a > 0$ vérifiant $f(a) \leqslant 1$ et pour tout $x \in [0, a]$, $f(x) \geqslant 0$.

Dans toute la suite de cette partie, on pose $f(a) = \cos\theta$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Question 4)

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

b) Montrez que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $f\left(p\frac{a}{2^n}\right) = \cos\left(p\frac{\theta}{2^n}\right)$.

Question 5) Soit x un réel positif fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \left\lfloor \frac{2^n x}{a} \right\rfloor$.

Montrez que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{p_n a}{2^n} = x$.

Question 6) Déduisez des questions précédentes qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\alpha x)$. Vous préciserez α en fonction de a et θ.

Partie 3 - Conclusion

Donnez toutes les solutions du problème posé.