

I Matrices de permutations

1. Pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$[\omega(\sigma)\omega(\sigma')]_{i,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} \stackrel{(1)}{=} \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))} = [\omega(\sigma \circ \sigma')]_{i,j}$$

(1) en ne conservant que le terme en $k = \sigma'(j)$.

Ainsi, $\boxed{\omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma)\omega(\sigma')}$.

2. Soit $\sigma \in B_n$. Pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$[{}^t\omega(\sigma)]_{ij} = [\omega(\sigma)]_{ji} = \delta_{j,\sigma(i)} \stackrel{(1)}{=} \delta_{i,\sigma^{-1}(j)} = [\omega(\sigma^{-1})]_{ij}$$

(1) car $j = \sigma(i) \iff i = \sigma^{-1}(j)$.

Donc : $\boxed{\forall \sigma \in B_n, {}^t\omega(\sigma) = \omega(\sigma^{-1})}$.

Ceci étant, d'après la question 1, pour tout $\sigma \in B_n$,

$$\omega(\sigma){}^t\omega(\sigma) = \omega(\sigma)\omega(\sigma^{-1}) = \omega(\text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}) = (\delta_{i,j})_{i,j} = I_n.$$

Donc $\omega(\sigma) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $\boxed{\omega(B_n) \subset \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$.

3. Soient $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)\omega(\sigma)$ et $D' = \omega(\sigma)\text{Diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)})$.

Alors, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} [D]_{ij} &= \sum_{k=1}^n (d_i \delta_{i,k})(\delta_{k,\sigma(j)}) = d_i \delta_{i,\sigma(j)} \\ [D']_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\delta_{i,\sigma(k)})(d_{\sigma(k)} \delta_{k,j}) = d_{\sigma(j)} \delta_{i,\sigma(j)} \end{aligned}$$

Ces deux expressions sont égales, car si $i \neq \sigma(j)$, elles sont nulles, sinon $i = \sigma(j)$ et $d_i = d_{\sigma(j)}$.

Donc :

$$\boxed{\text{Diag}(d_1, \dots, d_n)\omega(\sigma) = \omega(\sigma)\text{Diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)})}$$

4. Soient $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ et $D' = \text{Diag}(d'_1, \dots, d'_n)$ deux éléments de $D_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} &\iff \exists M \in \omega(B_n) \mid D' = {}^tMDM \\ &\iff \exists \sigma \in B_n \mid \text{Diag}(d'_1, \dots, d'_n) = {}^t\omega(\sigma)\text{Diag}(d_1, \dots, d_n)\omega(\sigma) \\ &\iff \exists \sigma \in B_n \mid \text{Diag}(d'_1, \dots, d'_n) = {}^t\omega(\sigma)\omega(\sigma)\text{Diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)}) \\ &\quad \uparrow \\ &\text{question 3} \\ &\iff \exists \sigma \in B_n \mid \text{Diag}(d'_1, \dots, d'_n) = \text{Diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)}) \\ &\quad \uparrow \\ &\text{question 2} \\ &\iff \exists \sigma \in B_n \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d'_i = d_{\sigma(i)} \\ &\iff \text{(i)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{(i)} \iff \text{(ii)}}$.

II Fonctions de matrices symétriques

5. D'après le théorème spectral, puisque S est symétrique réelle, il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que tOSO est une matrice diagonale.

Comme les éléments apparaissant sur la diagonale de tOSO sont les valeurs propres de S , et que celles-ci sont dans I , il existe $(s_1, \dots, s_n) \in I^n$ tels que ${}^tOSO = \text{Diag}(s_1, \dots, s_n)$.

En prenant $\Omega = {}^tO$, on obtient : $\boxed{{}^t\Omega \text{Diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega = S}$.

6. Soit t_1, \dots, t_r des réels deux à deux distincts tels que $\{t_1, \dots, t_r\} = \{s_1, \dots, s_n\}$.

Posons $P = \sum_{k=1}^r f(t_k) \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq k}} \frac{X - t_i}{t_k - t_i}$ (le polynôme interpolateur de Lagrange associé à f en les t_k).

Alors par un calcul immédiat, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $P(t_i) = f(t_i)$,

donc $\boxed{\text{pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(s_i) = f(s_i)}$.

7. Commençons par remarquer que $\{s_1, \dots, s_n\} = \text{Sp}(S) = \{s'_1, \dots, s'_n\}$.

Par conséquent, en choisissant $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par la question 6 tel que pour tout i , $P(s_i) = f(s_i)$, on a également pour tout i , $P(s'_i) = f(s'_i)$. Alors :

$$\begin{aligned} {}^t\Omega' \text{Diag}(f(s'_1), \dots, f(s'_n))\Omega' &= {}^t\Omega' \text{Diag}(P(s'_1), \dots, P(s'_n))\Omega' \\ &= {}^t\Omega' P(\text{Diag}(s'_1, \dots, s'_n))\Omega' \\ &\stackrel{(1)}{=} P({}^t\Omega' \text{Diag}(s'_1, \dots, s'_n)\Omega') \\ &= P({}^t\Omega \text{Diag}(s_1, \dots, s_n)\Omega) \\ &= {}^t\Omega \text{Diag}(P(s_1), \dots, P(s_n))\Omega \\ &= {}^t\Omega \text{Diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))\Omega \end{aligned}$$

(1) car la conjugaison dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un morphisme de \mathbb{R} -algèbres.

Ainsi, $\boxed{{}^t\Omega' \text{Diag}(f(s'_1), \dots, f(s'_n))\Omega' = {}^t\Omega \text{Diag}(f(s_1), \dots, f(s_n))\Omega}$.

REM. *Sans l'aide de la question 6, une façon « naturelle » de résoudre cette question serait de raisonner sur les sous-espaces propres. L'astuce consistant à passer par les polynômes est élégante !*

8. • Il est clair que \mathbb{R}^I et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\mathcal{S}_n(I)}$ sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels.

Soient $f, g \in \mathbb{R}^I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soient $S \in \mathcal{S}_n(I)$, puis $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(s_1, \dots, s_n) \in D_n(\mathbb{R})$ tels que $S = {}^t\Omega D \Omega$.

$$\begin{aligned} u(f + \lambda g)(S) &= {}^t\Omega \text{Diag}((f + \lambda g)(s_1), \dots, (f + \lambda g)(s_n)) \Omega \\ &= {}^t\Omega \text{Diag}(f(s_1) + \lambda g(s_1), \dots, f(s_n) + \lambda g(s_n)) \Omega \\ &= {}^t\Omega (\text{Diag}(f(s_1), \dots, f(s_n)) + \lambda \text{Diag}(g(s_1), \dots, g(s_n))) \Omega \\ &= {}^t\Omega \text{Diag}(f(s_1), \dots, f(s_n)) \Omega + \lambda {}^t\Omega \text{Diag}(g(s_1), \dots, g(s_n)) \Omega \\ &= (u(f) + \lambda u(g))(S) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $S \in \mathcal{S}_n(I)$, on en déduit que $u(f + \lambda g) = u(f) + \lambda u(g)$. Donc :

u est linéaire.

• Notons $\widetilde{\text{Tr}} : \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\mathcal{S}_n(I)} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application induite par la trace comme suit :

$$\forall f \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\mathcal{S}_n(I)}, \forall S \in \mathcal{S}_n(I), \widetilde{\text{Tr}}(f)(S) = \text{Tr}(f(S)).$$

Alors $\widetilde{\text{Tr}}$ est linéaire car, pour tous $f, g \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\mathcal{S}_n(I)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $S \in \mathcal{S}_n(I)$,

$$\begin{aligned} (\widetilde{\text{Tr}}(f + \lambda g))(S) &= \text{Tr}((f + \lambda g)(S)) \\ &= \text{Tr}(f(S) + \lambda g(S)) \\ &= \text{Tr}(f(S)) + \lambda \text{Tr}(g(S)) \quad (\text{par linéarité de } \text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}) \\ &= (\widetilde{\text{Tr}}(f))(S) + \lambda (\widetilde{\text{Tr}}(g))(S) \end{aligned}$$

Par composition de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^I, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\mathcal{S}_n(I)})$ et de $\widetilde{\text{Tr}} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\mathcal{S}_n(I)}, \mathbb{R})$,

l'application $v = \widetilde{\text{Tr}} \circ u$ est linéaire.

• Enfin, $xI_n = {}^tI_n \text{Diag}(x, \dots, x) I_n$ avec $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Donc $u(\varphi)(xI_n) = {}^tI_n \text{Diag}(\varphi(x), \dots, \varphi(x)) I_n = \varphi(x) I_n$.

Ainsi, $\forall \varphi \in \mathbb{R}^I, \forall x \in I, u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x) I_n$.

9. • INJECTIVITÉ DE u .

Soit $\varphi \in \text{Ker}(u)$.

Donc $u(\varphi)$ est l'application nulle de $\mathcal{S}_n(I)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) : \forall S \in \mathcal{S}_n(I), u(\varphi)(S) = 0_n$.

En particulier, pour tout $x \in I$, $xI_n \in \mathcal{S}_n(I)$, donc $u(\varphi)(xI_n) = 0$.

Autrement dit, d'après la question **8**, $\varphi(x)I_n = 0_n$,

Ainsi, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = 0$.

Donc $\text{Ker}(u) = \{0_{(\mathbb{R}^I)}\}$ et u est injective.

• SURJECTIVITÉ DE u .

Si $n = 1$, alors $\mathcal{S}_n(I)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont canoniquement isomorphes à I et \mathbb{R} .

Dans ce cas, l'application u n'est autre que l'identité de \mathbb{R}^I , surjective.

Si $n > 1$, d'après la question **8**, pour tout $\varphi \in \mathbb{R}^I$ et $x \in I$, $u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n$.

Donc $\text{Im}(u)$ ne contient pas la fonction constante de $\mathcal{S}_n(I) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$S \mapsto E_{11}$$

Ainsi, u n'est pas surjective, sauf si $n = 1$.

10. • Nous appliquons la même méthode qu'à la question **7**.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que f est l'application $x \in I \mapsto P(x)$.

Soient $S \in \mathcal{S}_n(I)$, puis $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(s_1, \dots, s_n) \in D_n(\mathbb{R})$ tels que $S = {}^t\Omega D \Omega$.

Alors :

$$\begin{aligned}
 u(f)(S) &= {}^t\Omega \text{Diag}(f(s_1), \dots, f(s_n)) \Omega \\
 &= {}^t\Omega \text{Diag}(P(s_1), \dots, P(s_n)) \Omega \\
 &= {}^t\Omega P(\text{Diag}(s_1, \dots, s_n)) \Omega \\
 &= P({}^t\Omega \text{Diag}(s_1, \dots, s_n) \Omega) \\
 &= P(S)
 \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall S \in \mathcal{S}_n(I), u(f)(S) = P(S)$.

• Réciproquement, supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall S \in \mathcal{S}_n(I), u(f)(S) = P(S)$.

Alors pour tout $x \in I$, $u(f)(xI_n) = P(xI_n) = P(x)I_n$.

Or d'après la question **8**, $u(f)(xI_n) = f(x)I_n$.

Donc pour tout $x \in I$, $f(x) = P(x)$.

Ainsi, la réciproque a lieu :

f est polynomiale si et seulement si $u(f)$ est « polynomiale ».

11. • Tout d'abord, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$, car :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, |[AB]_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^n [A]_{i,k}[B]_{k,i} \right| \leq \sum_{k=1}^n |[A]_{i,k}| |[B]_{k,i}| \leq n\|A\|\|B\|.$$

Comme $\|\Omega\| \leq 1$ lorsque $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

l'application $C_\Omega : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est n^2 -lipschitzienne. $M \longmapsto {}^t\Omega M \Omega$
--

• Supposons que $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\varphi \in \mathbb{R}^I$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soient $S \in \mathcal{S}_n(I)$, puis $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(s_1, \dots, s_n) \in D_n(\mathbb{R})$ tels que $S = {}^t\Omega D \Omega$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\varphi_k(s_i) - \varphi(s_i)| < \varepsilon$.

Alors, pour tout $k \geq N, \|\text{Diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n)) - \text{Diag}(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))\| < \varepsilon$.

Comme C_Ω est n^2 -lipschitzienne,

$$\|{}^t\Omega \text{Diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n)) \Omega - {}^t\Omega \text{Diag}(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n)) \Omega\| < n^2\varepsilon,$$

autrement dit,

$$|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)| < n^2\varepsilon.$$

Ceci montre que $(u(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $u(\varphi)$.

Nous venons de montrer que :

$$\forall S \in \mathcal{S}_n(I), u(\varphi_k)(S) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u(\varphi)(S).$$

Par continuité de l'application $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, linéaire en dimension finie, on en déduit que :

$$\forall S \in \mathcal{S}_n(I), v(\varphi_k)(S) = \text{Tr}(u(\varphi_k)(S)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{Tr}(u(\varphi)(S)) = v(\varphi)(S).$$

Ainsi,

$(v(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $v(\varphi)$.

• Supposons cette fois qu'il y a convergence uniforme de $(\varphi_k)_k$ vers φ .

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N, \forall x \in I, |\varphi_k(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Soient $S \in \mathcal{S}_n(I)$, puis $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(s_1, \dots, s_n) \in D_n(\mathbb{R})$ tels que $S = {}^t\Omega D \Omega$.

Alors, pour tout $k \geq N, \|\text{Diag}(\varphi_k(s_1), \dots, \varphi_k(s_n)) - \text{Diag}(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))\| < \varepsilon$.

Comme précédemment, il vient :

$$|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)| < n^2\varepsilon.$$

Nous avons donc montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, \forall S \in \mathcal{S}_n(I), \|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)\| < n^2\varepsilon. \quad (1)$$

Or $\text{Tr} : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est n -lipschitzienne, donc d'après (1),

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, \forall S \in \mathcal{S}_n(I), |\text{Tr}(u(\varphi_k)(S)) - \text{Tr}(u(\varphi)(S))| < n^3\varepsilon. \quad (2)$$

D'après (1) et (2), nous avons établi que :

les suites $(u(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément.
--

REM. Nous avons ainsi prouvé un substitut à la continuité de u , mais pas la continuité de u elle-même. En effet, pour cela, il aurait fallu normer les espaces \mathbb{R}^I et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\mathcal{S}_n(I)}$ et montrer que la convergence de $(\varphi_k)_k$ au sens de la norme choisie sur \mathbb{R}^I entraîne la convergence de $(u(\varphi_k))_k$ au sens de la norme choisie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\mathcal{S}_n(I)}$.

En fait, dès que I est infini, il n'existe aucune norme sur \mathbb{R}^I telle que la convergence simple soit la convergence pour cette norme. En revanche, la convergence uniforme de fonctions de \mathbb{R}^I correspond à la convergence en « norme infinie » à condition de se restreindre à $B(I, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions bornées.

III Norme et convexité

12. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale (b.o.n.) (V_1, \dots, V_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour la norme 2 telle que les V_i sont des vecteurs propres de S . (les V_i sont les colonnes de toute matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\Omega S \Omega$ est diagonale). Pour tout i , notons $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $SV_i = \lambda_i V_i$. On peut supposer que :

$$\min(\text{Sp}(S)) = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n = \max(\text{Sp}(S)).$$

Puisque (V_1, \dots, V_n) est une b.o.n., on a :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, {}^tV_i S V_j = \delta_{ij} \lambda_i.$$

Soit $X \in \Sigma$. Notons $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$.

Par le théorème de Pythagore, les x_i sont en valeur absolue inférieurs à 1. Alors :

$$\begin{aligned} {}^tX S X &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j {}^tV_i S V_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2. \\ \lambda_1 &= \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lambda_1 \leq \min\{{}^tX S X ; X \in \Sigma\} \leq \max\{{}^tX S X ; X \in \Sigma\} \leq \lambda_n$.

Par ailleurs, ${}^tV_1 S V_1 = \lambda_1$, ${}^tV_n S V_n = \lambda_n$ et $V_1, V_n \in \Sigma$.

Finalement,

$$\boxed{\begin{aligned} \min\{{}^tX S X ; X \in \Sigma\} &= \min(\text{Sp}(S)) \\ \max\{{}^tX S X ; X \in \Sigma\} &= \max(\text{Sp}(S)) \end{aligned}}$$

13. • Soient S et T dans $\mathcal{S}_n(I)$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Notons $m = \min(\text{Sp}(S) \cup \text{Sp}(T))$ et $M = \max(\text{Sp}(S) \cup \text{Sp}(T))$.

Alors, d'après la question **12** :

$$\forall X \in \Sigma, {}^tX S X \in [m, M] \text{ et } {}^tX T X \in [m, M].$$

D'où :

$$\forall X \in \Sigma, m \leq {}^tX(\lambda S + (1 - \lambda)T)X \leq M.$$

Donc à nouveau d'après la question **12** et parce que $\lambda S + (1 - \lambda)T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{Sp}(\lambda S + (1 - \lambda)T) \subset [m, M].$$

Or par définition de m et M , ils appartiennent à I , lequel est convexe, donc : $\text{Sp}(\lambda S + (1 - \lambda)T) \subset I$, autrement dit, $\lambda S + (1 - \lambda)T \in \mathcal{S}_n(I)$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{S}_n(I) \text{ est une partie convexe de } \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$.

• Considérons $\rho : S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \max\{|\lambda| ; \lambda \in \text{Sp}(S)\} \in \mathbb{R}_+$.

(i) Pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathbb{R}$, $\text{Sp}(\mu S) = \{\mu \lambda ; \lambda \in \text{Sp}(S)\}$. Donc $\rho(\mu S) = |\mu| \rho(S)$.

(ii) Pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(S) = 0$, alors $\text{Sp}(S) = 0$,

or S est diagonalisable, donc S est semblable à 0_n , donc $S = 0_n$.

(iii) Pour tous $S, T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \Sigma$,

$$|{}^tX S X| \leq \rho(S) \text{ et } |{}^tX T X| \leq \rho(T), \text{ donc } |{}^tX(S + T)X| \leq \rho(S) + \rho(T).$$

Donc d'après la question **12**, $\text{Sp}(S + T) \subset [-\rho(S) - \rho(T), \rho(S) + \rho(T)]$.

Donc $\rho(S + T) = \max\{|\lambda| ; \lambda \in \text{Sp}(S + T)\} \leq \rho(S) + \rho(T)$.

Ainsi, $\boxed{\rho \text{ est une norme sur } \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$.

IV Continuité des fonctions de matrices symétriques

14. Nous pouvons décomposer l'application χ ainsi :

— l'application $a : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}_1[X])^{n^2}$ est continue comme somme d'une application constante et d'une application linéaire, or $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) < \infty$;

— pour tout $\sigma \in B_n$, l'application $b_\sigma : (\mathbb{R}_1[X])^{n^2} \rightarrow (\mathbb{R}_1[X])^n$ est continue car linéaire en dimension finie ;

— l'application $c : (\mathbb{R}_1[X])^n \rightarrow \mathbb{R}[X]$ est continue car n linéaire en dimension finie ;

— finalement, l'application $\chi = \sum_{\sigma \in B_n} \varepsilon(\sigma) c \circ b_\sigma \circ a$ est continue comme somme de composées d'applications continues.

Ainsi, $\boxed{\chi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}[X] \text{ est continue.}}$

REM. On peut aussi expliquer que les coefficients du polynôme caractéristique sont polynômiaux en les coefficients de la matrice.

Cette question sera pas utile pour la réponse alternative à la question 16.

15. Nous aurons besoin des fonctions continues suivantes :

— $a : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (linéaire en dimension finie) ;
 $N \mapsto ([N]_{11}, [N]_{22}, \dots, [N]_{nn})$

— $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3 \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (trilinéaire en dimension finie).
 $(A, B, C) \mapsto {}^tABC$

Par hypothèse, $M_k \rightarrow M$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $(\Omega_k)_k \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout k , ${}^t\Omega_k S_k \Omega_k$ est diagonale.

Pour tout k , on note $\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k} \in \mathbb{R}$ tels que ${}^t\Omega_k S_k \Omega_k = \text{Diag}(\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k})$.

On peut de plus supposer que les Ω_k sont tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_{1,k} \leq \lambda_{2,k} \leq \dots \leq \lambda_{n,k}.$$

Par compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il existe une sous-suite $(\Omega_{\alpha(k)})_k$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $\Omega_{\alpha(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \Omega$.

On a également : $M_{\alpha(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} M$.

On en déduit : $(\Omega_{\alpha(k)}, S_{\alpha(k)}, \Omega_{\alpha(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (\Omega, S, \Omega)$.

Par composition par f continue, on obtient : ${}^t\Omega_{\alpha(k)} S_{\alpha(k)} \Omega_{\alpha(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} {}^t\Omega S \Omega$.

Mais $D_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme sous-espace vectoriel en dimension finie, donc ${}^t\Omega S \Omega \in D_n(\mathbb{R})$ et il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que ${}^t\Omega S \Omega = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Autrement dit, $\text{Diag}(\lambda_{1,\alpha(k)}, \dots, \lambda_{n,\alpha(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Par composition par a continue, on obtient : $(\lambda_{1,\alpha(k)}, \lambda_{2,\alpha(k)}, \dots, \lambda_{n,\alpha(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Or, par passage à la limite d'inégalités larges dans \mathbb{R} , on a : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Et comme pour tout k , $(\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \dots, \lambda_{n,k}) = \text{Sp}_\uparrow(M_k)$ tandis que $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = {}^t\Omega M \Omega$, il vient avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, on a établi :

$\boxed{\text{la suite } (\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ admet une valeur d'adhérence croissante, égale à } \text{Sp}_\uparrow(M)}$.

REM. Cette dernière précision sera utile pour la question 16.

Nous avons utilisé la compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, laquelle est à démontrer question 18.

Voici dans les grandes lignes une **méthode alternative**, probablement attendue, pour cette question : $(\rho(M_k))_k$ est une suite convergente donc bornée. Donc $(\Lambda_k)_k$ est une suite bornée dans $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$. Donc on peut en extraire une suite convergente et on passe à la limite dans l'inégalité. On en déduit que $(\Lambda_k)_k$ admet une limite croissante, sans pour autant faire le lien avec $\text{Sp}_\uparrow(M)$.

16. Supposons que $(\Lambda_{\alpha(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

Rappelons que $M_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} M$, donc $M_{\alpha(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} M$.

Alors, en appliquant la question **15** à la suite $(M_{\alpha(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, il vient que $(\Lambda_{\alpha(k)})_k$ admet une sous-suite convergente vers $\text{Sp}_\uparrow(M)$.

Or par hypothèse, $(\Lambda_{\alpha(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge, donc ce doit être vers $\text{Sp}_\uparrow(M)$.

$$\boxed{\Lambda_{\alpha(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{Sp}_\uparrow(M)}$$

REM. Avec la méthode alternative de la question **15**, on ne savait pas que $\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k = \text{Sp}_\uparrow(M)$, mais on peut le déduire à l'aide de la continuité de χ (cf. question **14**), sachant que $\chi_{M_k} = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_{i,k})$ avec pour tout k , $(\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k}) = \text{Sp}_\uparrow(M_k)$.

17. D'après la question **16**, la suite $(\Lambda_k)_k$ a pour unique valeur d'adhérence $\text{Sp}_\uparrow(M)$.

Or, $M_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} M$, donc $\rho(M_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho(M)$ par continuité de la norme.

Ainsi, la suite $(\rho(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est dans un compact K de \mathbb{R} .

Donc la suite $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans le compact (K^n) de \mathbb{R}^n (compact, car produit cartésien fini de compacts).

Mais d'après une conséquence fameuse du théorème de Weierstrass, toute suite à valeurs dans un compact et ne possédant qu'une unique valeur d'adhérence converge.

Donc $(\text{Sp}_\uparrow(M_k))_k$ converge vers $\text{Sp}_\uparrow(M)$ dans \mathbb{R}^n .

Ceci étant vrai pour toute suite $(M_k)_k$ tendant vers M , on en déduit la continuité de Sp_\uparrow en M .

Enfin, ceci étant vrai pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\boxed{\text{on en déduit la continuité de } \text{Sp}_\uparrow \text{ sur } \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$.

18. Puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, il suffit de le vérifier pour la norme $\| \cdot \|$.

- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puisque les coefficients de toute matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sont majorés par 1 en valeur absolue.

- Par ailleurs, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; {}^t M M = I_n\} = (f \circ g)^{-1}(\{I_n\})$ où :

- * $g : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (A, A)$ est linéaire en dimension finie, donc continue ;

- * $f : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto {}^t A B$ est bilinéaire en dimension finie, donc continue.

Donc $f \circ g$ est continue. Or $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par $f \circ g$, donc est fermé.

- Enfin, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc les fermés bornés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont compacts, donc $\boxed{\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est compact}}$.

19. Il semble qu'il faille suivre à nouveau le cheminement des questions **15**, **16**, **17**.

- A nouveau, nous utilisons la caractérisation séquentielle de la continuité : montrons que pour toute suite convergente $M_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} M$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $u(\varphi)(M_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u(\varphi)(M)$.

- La suite $(M_k)_k$ étant convergente, elle est incluse dans un compact de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- En utilisant la norme ρ , il vient que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Sp}(M_k)$ est inclus dans un compact K de \mathbb{R} .

- Pour tout k , on définit Ω_k tel que $M_k = {}^t\Omega_k \text{Diag}(\text{Sp}_\uparrow(M_k))\Omega_k$.
- Par compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il existe une injection croissante α de \mathbb{N} telle que $(\Omega_{\alpha(k)})_k$ converge vers une matrice $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- Par ailleurs, d'après la question **17**, $\text{Sp}_\uparrow(M_{\alpha(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{Sp}_\uparrow(M)$.
- Notons Φ :
$$\begin{array}{ccc} I^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & (\varphi(\lambda_1), \dots, \varphi(\lambda_n)) \end{array}$$
 continue.
- Alors $\Phi(\text{Sp}_\uparrow(M_{\alpha(k)})) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \Phi(\text{Sp}_\uparrow(M))$, donc $u(\varphi)(M_{\alpha(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u(\varphi)(M)$.
- Supposons que $(u(\varphi)(M_{\beta(k)}))_k$ converge.
D'après ce qui précède, $(u(\varphi)(M_{\beta(k)}))_k$ admet $u(\varphi)(M)$ comme valeur d'adhérence.
C'est donc l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u(\varphi)(M_k))_k$.
- Or pour tout k , $u(\varphi)(M_k)$ appartient aux matrices symétriques dont le spectre est inclus dans $\varphi(K)$, compact car φ est continue. Il s'agit d'une boule fermée pour la norme ρ , donc c'est un compact de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $(u(\varphi)(M_k))_k$ vit dans un compact et ne possède qu'une seule valeur d'adhérence, donc $(u(\varphi)(M_k))_k$ converge. Et donc, $u(\varphi)$ est continue.
- En composant par la trace (linéaire en dimension finie donc continue), $v(\varphi)$ est continue.

V Convexité des fonctions de matrices symétriques

20. • Soit $U \in \mathcal{U}_S$. Il existe alors $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $U = {}^t\Omega S \Omega$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons E_i le i -ème vecteur élémentaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[U]_{k,k} = {}^t E_k {}^t \Omega S \Omega E_k = {}^t X S X$ où $X = \Omega E_k \in \Sigma$.

D'après la question **12**, on en déduit que ${}^t X S X \in [\min(\text{Sp}(S)), \max(\text{Sp}(S))]$.

Or I est un intervalle contenant $\min(\text{Sp}(S))$ et $\max(\text{Sp}(S))$ car $S \in \mathcal{S}_n(I)$, donc $[U]_{k,k} \in I$.

- Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{Sp}_\uparrow(S)$. Alors $v(f)(s) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)$.

D'une part, la matrice $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{U}_S$ et $\sum_{k=1}^n f([D]_{k,k}) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) = v(f)(s)$.

D'autre part, soit $U \in \mathcal{U}_S$, puis $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^t V U V = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $V_j = V E_j$ et $v_{ij} = {}^t E_i V E_j$ de sorte que $V = (v_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f([U]_{jj}) &= \sum_{j=1}^n f({}^t V_j \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V_j) \\ &= \sum_{j=1}^n f\left(\sum_{i=1}^n v_{ij}^2 \lambda_i\right) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n v_{ij}^2 f(\lambda_i)\right) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} v(f)(S) \end{aligned}$$

(1) a lieu par convexité de f , étant donné que $\sum_{i=1}^n v_{ij}^2 = 1$, puisque $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;

(2) a lieu car par interversion des signes somme et car $\sum_{j=1}^n v_{ij}^2 = 1$, puisque $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, $\max \left\{ \sum_{k=1}^n f([U_{k,k}]) ; U \in \mathcal{U}_S \right\} = v(f)(S)$.

21. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(I)$, $t \in [0, 1]$.

Soient $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in I^n$ tels que $(1-t)A + tB = {}^tV \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)V$.

$$\begin{aligned}
 v(f)((1-t)A + tB) &= \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n f([V((1-t)A + tB)^tV]_{i,i}) \\
 &= \sum_{i=1}^n f((1-t)[VA^tV]_{i,i} + t[VB^tV]_{i,i}) \\
 &\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{i=1}^n ((1-t)f([VA^tV]_{i,i}) + tf([VB^tV]_{i,i})) \\
 &\stackrel{(2)}{\leq} (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)
 \end{aligned}$$

(1) par convexité de f entre les points $[VA^tV]_{i,i}$ et $[VB^tV]_{i,i}$, lesquels appartiennent à I d'après la question **20** ;

(2) car d'après la question **20**, $\sum_{i=1}^n f([VA^tV]_{i,i}) \leq v(f)(A)$ et $\sum_{i=1}^n f([VB^tV]_{i,i}) \leq v(f)(B)$.

Nous avons donc montré la convexité de $v(f)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$:

$$\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{S}_n(I)^2, \forall t \in [0, 1], v(f)((1-t)A + tB) \leq (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)}.$$

22. Nous venons de montrer à la question **21** que si f est convexe, alors $v(f)$ l'est.

Réciproquement, supposons que $v(f)$ soit convexe sur $\mathcal{S}_n(I)$.

Pour tous $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$, il vient :

$$\underbrace{v(f)((1-t)xI_n + tyI_n)}_{nf((1-t)x+ty)} \leq (1-t) \underbrace{v(f)(xI_n)}_{nf(x)} + t \underbrace{v(f)(yI_n)}_{nf(y)}.$$

En divisant par n , on obtient la définition de la convexité de f . Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I \text{ si et seulement si } v(f) \text{ est convexe sur } \mathcal{S}_n(I)}.$$

VI Trois sujets d'oraux proches du thème de ce devoir

Les numéros et années des exercices font références aux livres édités par la RMS :
« 1400 (resp. 1300, 1417) énoncés d'exercices oraux issus des concours d'entrée aux grandes écoles 2017 (resp. 2018, 2019) »

Mines - MP - 2017 (628)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A et on pose $N(A) = \max\{|\lambda|\}_{\lambda \in \text{Sp}(A)}$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et comparer $N(AB)$ avec $N(A)N(B)$.
3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), AB = BA \Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. Montrer que pour toute $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), N(A) \leq \|A\|$.

Mines - MP - 2018 (572)

Soient A et B deux matrices symétriques réelles de taille n .
Etudier la convexité de l'application $f : t \mapsto \max \text{Sp}(A + tB)$.

Centrale - MP - 2017 (1059)

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S .
On pose $\Omega = \{PSP^{-1} ; P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \Omega$.

(i) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{k,k} \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

(ii) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $\max \left\{ \sum_{k=1}^n \varphi(a_{kk}) ; A \in \Omega \right\} = \sum_{k=1}^n \varphi(\lambda_k)$.

2. Soient $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

Si $u \in \mathcal{S}(E)$ et si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on note $p_{\lambda,u}$ le projecteur orthogonal sur $\text{Ker}(u - \lambda \text{id})$.

On pose $f(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} f(\lambda) p_{\lambda,u}$. Soient $v, w \in \mathcal{S}(E)$ et $t \in [0, 1]$. Montrer :

$$\text{Tr}(f((1-t)v + tw)) \leq (1-t)\text{Tr}(f(v)) + t\text{Tr}(f(w)).$$